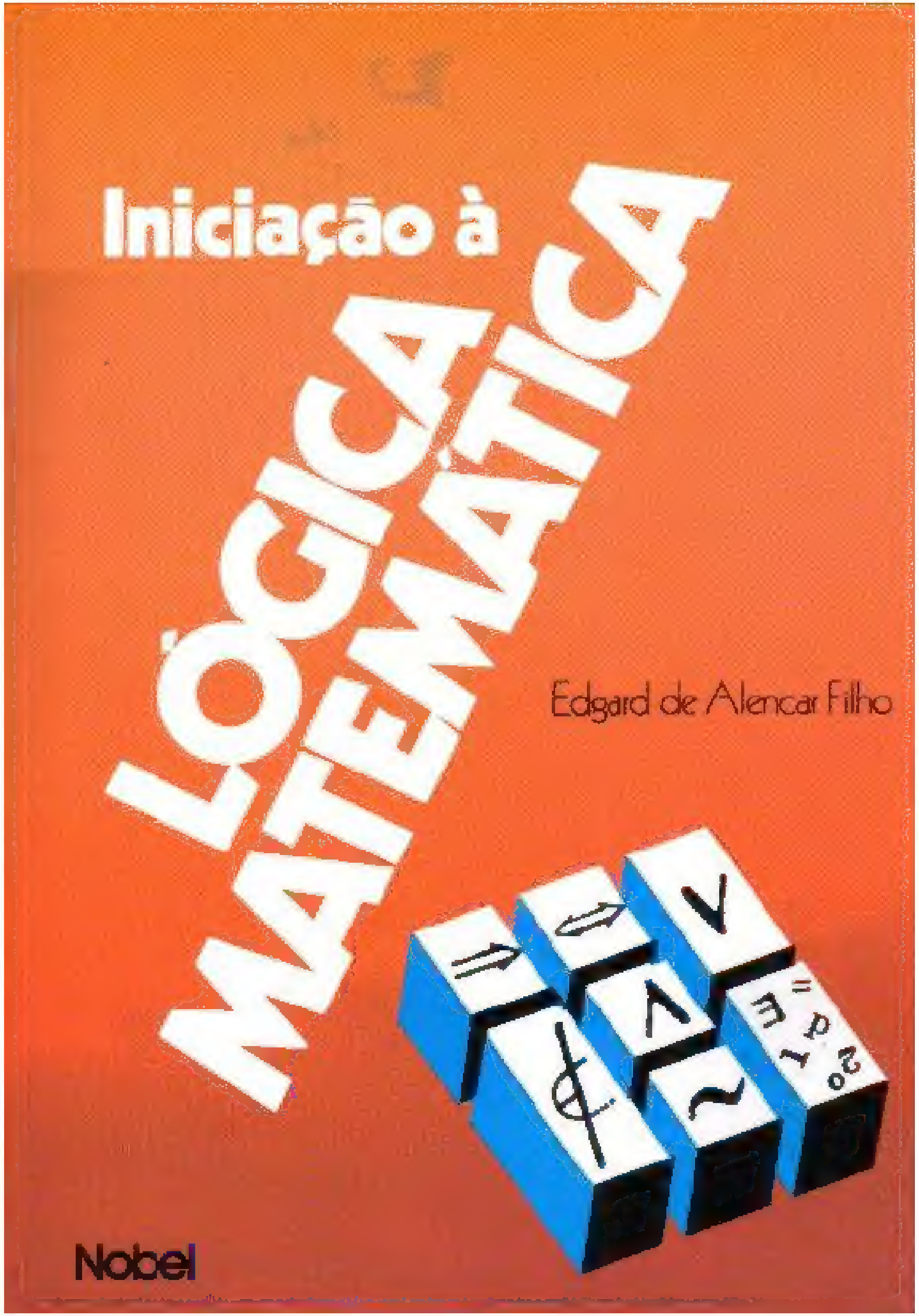


© 1975 Edgard de Alencar Filho

Direitos desta edição reservados à
AMPUB Comercial Ltda.

(Nobel é um selo editorial da AMPUB Comercial Ltda.)
Rua Pedroso Alvarenga 1046 – 9º andar – 04531-004 – São Paulo, SP
Fone: (11) 3706-1466 – Fax: (11) 3706-1462
www.editoranobel.com.br
E-mail: ednobel@editoranobel.com.br

Impressão: Paym Gráfica e Editora Ltda.
Reimpressão: 2003

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

A 355i Alencar Filho, Edgard de, 1913
Iniciação à lógica matemática/ Edgard de Alencar Filho. – São Paulo : Nobel, 2002.

Bibliografia
ISBN 85-213-0403-X

1. Lógica simbólica e matemática. I. Título.

86-0802 CDD-511.3

Índice para catálogo sistemático:
1. Lógica matemática 511.3

É PROIBIDA A REPRODUÇÃO

Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida, copiada, transcrita ou mesmo transmitida por meios eletrônicos ou gravações, sem a permissão, por escrito, do editor. Os infratores serão punidos pela Lei nº 9.610/98.

Impresso no Brasil/*Printed in Brazil*

Índice

Capítulo 1
PROPOSIÇÕES. CONECTIVOS

1. Conceito de proposição 11
2. Valores lógicos das proposições 12
3. Proposições simples e proposições compostas 12
4. Conectivos 13
5. Tabela-verdade 13
6. Notação 15
   Exercícios 15

Capítulo 2
OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE PROPOSIÇÕES

2. Negação 17
3. Conjunção 18
4. Disjunção 20
5. Disjunção exclusiva 21
6. Condicional 22
7. Bicondicional 23
   Exercícios 27

Capítulo 3
CONSTRUÇÃO DE TABELAS-VERDADE

1. Tabela-verdade de uma proposição composta 29
2. Número de linhas de uma tabela-verdade 29
3. Construção da tabela-verdade de uma proposição composta 30
4. Exemplificação 30
5. Valor lógico de uma proposição composta 36
6. Uso de parêntesis 38
7. Outros símbolos para os conectivos 39
   Exercícios 39

Capítulo 4
TAUTOLOGIAS, CONTRADIÇÕES E CONTINGÊNCIAS

1. Tautologia 43
2. Princípio de substituição para as tautologias 45
3. Contradição 46
4. Contingência 47
   Exercícios 48

Capítulo 5
IMPLICAÇÃO LÓGICA

1. Definição de implicação lógica 49
2. Propriedades da implicação lógica 49
3. Exemplificação 50
4. Tautologias e implicação lógica 52
   Exercícios 53

Capítulo 6
EQUIVALÊNCIA LÓGICA

1. Definição de equivalência lógica 55
2. Propriedades da equivalência lógica 55
3. Exemplificação 56
4. Tautologias e equivalência lógica 57
5. Proposições associadas a uma condicional 59
6. Negação conjunta de duas proposições 62
7. Negação disjunta de duas proposições 63
   Exercícios 63

Capítulo 7
ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

1. Propriedades da conjunção 67
2. Propriedades da disjunção 69

3. Propriedades da conjunção e da disjunção 71
4. Negação da condicional 74
5. Negação da bicondicional 74
Exercícios 75

Capítulo 8
MÉTODO DEDUTIVO

2. Exemplificação 78
3. Redução do número de conectivos 81
4. Forma normal das proposições 82
5. Forma normal conjuntiva 82
6. Forma normal disjuntiva 84
7. Princípio de dualidade 85
Exercícios 85

Capítulo 9
ARGUMENTOS. REGRAS DE INFERÊNCIA

1. Definição de argumento 87
2. Validade de um argumento 87
3. Critério de validade de um argumento 88
4. Condicional associada a um argumento 89
5. Argumentos válidos fundamentais 90
6. Regras de inferência 91
7. Exemplos do uso das regras de inferência 92
Exercícios 96

Capítulo 10
VALIDADE MEDIANTE TABELAS-VERDADE

2. Exemplificação 99
3. Prova de não-validade 108
Exercícios 110

Capítulo 11
VALIDADE MEDIANTE REGRAS DE INFERÊNCIA

2. Exemplificação 112
Exercícios 118

Capítulo 12
VALIDADE MEDIANTE REGRAS DE INFERÊNCIA E EQUIVALÊNCIAS

1. Regra de substituição 129
2. Equivalências notáveis 129
3. Exemplificação 131
4. Inconsistência 138
Exercícios 141

Capítulo 13
DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL E DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

1. Demonstração condicional 145
2. Exemplificação 146
3. Demonstração indireta 149
4. Exemplificação 150
Exercícios 153

Capítulo 14
SENTENÇAS ABERTAS

1. Sentenças abertas com uma variável 156
2. Conjunto-verdade de uma sentença aberta com uma variável 156
3. Sentenças abertas com duas variáveis 158
4. Conjunto-verdade de uma sentença aberta com duas variáveis 159
5. Sentenças abertas com n variáveis 160
6. Conjunto-verdade de uma sentença aberta com n variáveis 161
Exercícios 162

Capítulo 15
OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE SENTENÇAS ABERTAS

2. Conjunção 164
3. Disjunção 166
4. Negação 168
5. Condicional 169
6. Bicondicional 170
7. Álgebra das sentenças abertas 171
Exercícios 172

Capítulo 16
QUANTIFICADORES

1. Quantificador universal 175
2. Quantificador existencial 178
3. Variável aparente e variável livre 180
4. Quantificador de existência e unicidade 180
5. Negação de proposições com quantificador 181
6. Contra-exemplo 183
Exercícios 183

Capítulo 17
QUANTIFICAÇÃO DE SENTENÇAS ABERTAS COM MAIS DE UMA VARIÁVEL

1. Quantificação parcial 187
2. Quantificação múltipla 187
3. Comutatividade dos quantificadores 189
4. Negação de proposições com quantificadores 190
Exercícios 190

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS 193

BIBLIOGRAFIA 203

Capítulo 1

Proposições. Conectivos

1. CONCEITO DE PROPOSIÇÃO

Definição – Chama-se **proposição** todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

As proposições transmitem pensamentos, isto é, **afirmam fatos ou exprimem juízos** que formamos a respeito de determinados entes.

Assim, p. ex., são **proposições**:

(a) A Lua é um satélite da Terra
(b) Recife é a capital de Pernambuco
(c) $\pi > \sqrt{5}$
(d) $\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$

A **Lógica Matemática** adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes **princípios** (ou axiomas):

(I) PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: **Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.**

(II) PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: **Toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.**

Por virtude deste princípio diz-se que a **Lógica Matemática** é uma Lógica **bivalente.**

Por exemplo, as proposições (a), (b), (c) e (d) são todas **verdadeiras**, mas são **falsas** as cinco seguintes proposições:

(a) VASCO DA GAMA descobriu o Brasil
(b) DANTE escreveu os Lusíadas

(c) $\frac{3}{5}$ é um número inteiro

(d) O número π é racional

(e) tg $\frac{\pi}{4} = 2$

Assim, as proposições são expressões a respeito das quais tem sentido dizer que são **verdadeiras** ou **falsas**.

2. VALORES LÓGICOS DAS PROPOSIÇÕES

Definição – Chama-se **valor lógico** de uma proposição a **verdade** se a proposição é verdadeira e a **falsidade** se a proposição é falsa.

Os valores lógicos **verdade** e **falsidade** de uma proposição designam-se abreviadamente pelas letras V e F, respectivamente. Assim, o que os princípios da **não contradição** e do **terceiro excluído** afirmam é que:

Toda a proposição tem um, e um só, dos valores V, F.

Consideremos, p. ex., as proposições:

(a) O mercúrio é mais pesado que a água
(b) O Sol gira em torno da Terra

O **valor lógico** da proposição (a) é a **verdade**(V) e o valor lógico da proposição (b) é a **falsidade**(F).

3. PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

As proposições podem ser classificadas em **simples** ou **atômicas** e **compostas** ou **moleculares**.

Definição 1 – Chama-se **proposição simples** ou **proposição atômica** aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma.

As **proposições simples** são geralmente designadas pelas letras latinas minúsculas p, q, r, s, . . . , chamadas **letras proposicionais**.

Assim, p. ex., são **proposições simples** as seguintes:

p : Carlos é careca
q : Pedro é estudante
r : O número 25 é quadrado perfeito

Definição 2 – Chama-se **proposição composta** ou **proposição molecular** aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.

As **proposições compostas** são habitualmente designadas pelas letras latinas maiúsculas P, Q, R, S, . . . , também chamadas **letras proposicionais**.

Assim, p. ex., são **proposições compostas** as seguintes:

P : Carlos é careca e Pedro é estudante
Q : Carlos é careca ou Pedro é estudante
R : **Se** Carlos é careca, **então** é infeliz

visto que cada uma delas é formada por duas proposições **simples**.

As **proposições compostas** também costumam ser chamadas **fórmulas proposicionais** ou apenas **fórmulas**.

Quando interessa destacar ou explicitar que uma proposição composta P é formada pela combinação das proposições simples p, q, r, . . . , escreve-se: P(p, q, r, . . .).

As **proposições simples** e as **proposições compostas** também são chamadas respectivamente **átomos** e **moléculas**.

Observaremos ainda que as proposições componentes de uma proposição composta podem ser, elas mesmas, proposições compostas.

4. CONECTIVOS

Definição – Chamam-se **conectivos** palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras.

Assim, p. ex., nas seguintes proposições compostas:

P : O número 6 é par **e** o número 8 é cubo perfeito
Q : O triângulo ABC é retângulo **ou** é isósceles
R : **Não** está chovendo
S : **Se** Jorge é engenheiro, **então** sabe Matemática
T : O triângulo ABC é equilátero **se e somente se** é equiângulo

são **conectivos** usuais em Lógica Matemática as palavras que estão grifadas, isto é:

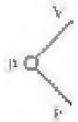
"e", "ou", "não", "se . . . então . . ." ". . . se e somente se . . ."

5. TABELA-VERDADE

Segundo o **Princípio do terceiro excluído**, toda proposição simples p é verdadeira ou é falsa, isto é, tem o valor lógico V(verdade) ou o valor lógico F(falsidade).

Em se tratando de uma proposição composta, a determinação do seu valor lógico, conhecidos os valores lógicos das proposições simples componentes, se faz com base no seguinte **princípio**:

p
V
F



O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Admitido este **princípio**, para aplicá-lo na prática à determinação do valor lógico de uma proposição composta dada, recorre-se quase sempre a um dispositivo denominado **tabela-verdade**, na qual figuram todos os possíveis valores lógicos da proposição composta correspondentes a todas as possíveis atribuições de valores lógicos às proposições simples componentes.

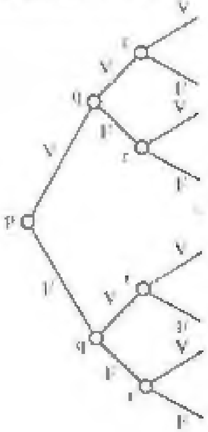
Assim, p. ex., no caso de uma proposição composta cujas proposições simples componentes são p e q, as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p e a q são:

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Observe-se que os valores lógicos V e F se alternam de **dois em dois** para a primeira proposição p e **de um em um** para a segunda proposição q, e que, além disso, VV, VF, FV e FF são os **arranjos binários com repetição** dos dois elementos V e F.

No caso de uma proposição composta cujas proposições simples componentes são p, q e r, as únicas possíveis atribuições de valores lógicos a p, a q e a r são:

	p	q	r
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F



Analogamente, observe-se que os valores lógicos V e F se alternam de **quatro em quatro** para a primeira proposição p, de **dois em dois** para a segunda proposição q e **de um em um** para a terceira proposição r, e que, além disso, VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV e FFF são os **arranjos ternários com repetição** dos dois elementos V e F.

6. NOTAÇÃO

O **valor lógico** de uma proposição simples p indica-se por **V(p)**. Assim, exprime-se que p é **verdadeira**(V), escrevendo: V(p) = V.

Analogamente, exprime-se que p é **falsa**(F), escrevendo: V(p) = F.

Sejam, p. ex., as proposições simples:

p : O Sol é verde
q : Um hexágono tem 9 diagonais
r : 2 é raiz da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$

Temos:

V(p) = F,   V(q) = V,   V(r) = F

Do mesmo modo, o **valor lógico** de uma proposição composta P indica-se por V(P).

EXERCÍCIOS

1. Determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) O número 17 é primo.
(b) Fortaleza é a capital do Maranhão.
(c) TIRADENTES morreu afogado.
(d) $(3 + 5)^2 = 3^2 + 5^2$
(e) O valor archimediano de π é $\frac{22}{7}$
(f) $-1 < -7$
(g) 0,131313. . . é uma dízima periódica simples.
(h) As diagonais de um paralelogramo são iguais.
(i) Todo polígono regular convexo é inscritível.
(j) O hexaedro regular tem 8 arestas.

(k) A expressão $n^2 - n + 41$ ($n \in N$) só produz números primos.
(l) Todo número divisível por 5 termina por 5.
(m) O produto de dois números ímpares é um número ímpar.
(n) $sen^2 30° + sen^2 60° = 2$.
(o) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)^2 = n^2$.
(p) As raízes da equação $x^3 - 1 = 0$ são todas reais.
(q) O número 125 é cubo perfeito.
(r) 0,4 e −4 são as raízes da equação $x^3 - 16x = 0$.
(s) O cubo é um poliedro regular.
(t) $sen(\frac{\pi}{2} + x) = sen(\frac{\pi}{2} - x)$.
(u) $tg \frac{\pi}{4} < tg \frac{\pi}{6}$.

Capítulo 2

Operações Lógicas sobre Proposições

1. Quando pensamos, efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas **operações lógicas**. Estas obedecem a regras de um cálculo, denominado **cálculo proposicional**, semelhante ao da aritmética sobre números. Estudaremos a seguir as operações lógicas fundamentais.

2. NEGAÇÃO (~)

Definição – Chama-se **negação de uma proposição** p a proposição representada por "não p", cujo **valor lógico** é a **verdade**(V) quando p é falsa e a **falsidade**(F) quando p é verdadeira.

Assim, "não p" tem o valor lógico oposto daquele de p.

Simbolicamente, a **negação de** p indica-se com a notação "~ p", que se lê: "não p".

O valor lógico da **negação** de uma proposição é, portanto, **definido** pela seguinte **tabela-verdade** muito simples:

p	~ p
V	F
F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$\sim V = F, \quad \sim F = V$$

e

$$V(\sim p) = \sim V(p)$$

Exemplos:

(1) $p: 2+3=5$ (V) e $\sim p: 2+3 \neq 5$ (F)
$V(\sim p) = \sim V(p) = \sim V = F$

(2) $q: 7 < 3$ (F) e $\sim q: 7 \nless 3$ (V)
$V(\sim q) = \sim V(q) = \sim F = V$

(3) r : Roma é a capital da França (F) e $\sim$r : Roma não é a capital da França (V)
$V(\sim r) = \sim V(r) = \sim F = V$

Na linguagem comum a **negação** efetua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio "não" ao verbo da proposição dada. Assim, p. ex., a **negação** da proposição:

p : O Sol é uma estrela

é

$\sim$ p : O Sol não é uma estrela

Outra maneira de efetuar a **negação** consiste em antepor à proposição dada expressões tais como "não é verdade que", "é falso que". Assim, p. ex., a **negação** da proposição:

q : Carlos é mecânico

é

$\sim$ q : Não é verdade que Carlos é mecânico

ou

$\sim$ q : É falso que Carlos é mecânico

Observe-se, entretanto, que a negação de "Todos os homens são elegantes" é "Nem todos os homens são elegantes" e a de "Nenhum homem é elegante" é "Algum homem é elegante".

3. CONJUNÇÃO ($\wedge$) AND

Definição — Chama-se **conjunção de duas proposições** p e q a proposição representada por "p e q", cujo **valor lógico** é a **verdade**(V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a **falsidade**(F) nos demais casos.

Simbolicamente, a **conjunção de duas proposições** p e q indica-se com a notação: "$p \wedge q$", que se lê: "p e q".

O valor lógico da **conjunção** de duas proposições é, portanto, **definido** pela seguinte **tabela-verdade:**

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ou seja, pelas **igualdades:**

$$V \wedge V = V, \quad V \wedge F = F, \quad F \wedge V = F, \quad F \wedge F = F$$

e

$$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$$

Exemplos:

(1) $\begin{cases} p: \text{A neve é branca} & (V) \\ q: 2 < 5 & (V) \end{cases}$

$p \wedge q$: A neve é branca e $2 < 5$ (V)
$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$

(2) $\begin{cases} p: \text{O enxôfre é verde} & (F) \\ q: \text{7 é um número primo} & (V) \end{cases}$

$p \wedge q$: O enxôfre é verde e 7 é um número primo (F)
$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge V = F$

(3) $\begin{cases} p: \text{CANTOR nasceu na Rússia} & (V) \\ q: \text{FERMAT era médico} & (F) \end{cases}$

$p \wedge q$: CANTOR nasceu na Rússia e FERMAT era médico (F)
$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge F = F$

(4) $\begin{cases} p: \pi > 4 & (F) \\ q: \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0 & (F) \end{cases}$

$p \wedge q : \pi > 4$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0$ (F)
$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge F = F$

4. DISJUNÇÃO ($\vee$)

Definição — Chama-se **disjunção de duas proposições** p e q a proposição representada por "p ou q", cujo **valor lógico** é a **verdade**(V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a **falsidade**(F) quando as proposições p e q são ambas falsas.

Simbolicamente, a **disjunção de duas proposições** p e q indica-se com a notação: "$p \vee q$", que se lê: "p ou q".

O valor lógico da **disjunção** de duas proposições é, portanto, **definido** pela seguinte **tabela-verdade**:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou seja pelas igualdades:

$$V \vee V = V, \quad V \vee F = V, \quad F \vee V = V, \quad F \vee F = F$$

e

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$$

Exemplos:

(1) $\begin{cases} p : \text{Paris é a capital da França} \quad (V) \\ q : 9 - 4 = 5 \quad (V) \end{cases}$

$p \vee q$: Paris é a capital da França ou $9 - 4 = 5$ (V)
$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V$

(2) $\begin{cases} p : \text{CAMÕES escreveu os Lusíadas} \quad (V) \\ q : \pi = 3 \quad (F) \end{cases}$

$p \vee q$: CAMÕES escreveu os Lusíadas ou $\pi = 3$ (V)
$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V$

(3) $\begin{cases} p : \text{Roma é a capital da Rússia} \quad (F) \\ q : 5/7 \text{ é uma fração própria} \quad (V) \end{cases}$

$p \vee q$: Roma é a capital da Rússia ou 5/7 é uma fração própria (V)
$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee V = V$

(4) $\begin{cases} p : \text{CARLOS GOMES nasceu na Bahia} \quad (F) \\ q : \sqrt{-1} = 1 \quad (F) \end{cases}$

$p \vee q$: CARLOS GOMES nasceu na Bahia ou $\sqrt{-1} = 1$ (F)
$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee F = F$

5. DISJUNÇÃO EXCLUSIVA ($\underline{\vee}$)

Na linguagem comum a palavra "ou" tem **dois sentidos**. Assim, p. ex., consideremos as duas seguintes proposições compostas:

P : Carlos é médico ou professor
Q : Mario é alagoano ou gaúcho

Na proposição P se está a indicar que uma pelo menos das proposições "Carlos é médico", "Carlos é professor" é verdadeira, podendo ser ambas verdadeiras: "Carlos é médico e professor". Mas, na proposição Q, se está a precisar que uma e somente uma das proposições "Mario é alagoano", "Mario é gaúcho" é verdadeira, pois, não é possível ocorrer "Mario é alagoano e gaúcho".

Na proposição P diz-se que "ou" é **inclusivo**, enquanto que, na proposição Q, diz-se que "ou" é **exclusivo**.

Em Lógica Matemática usa-se habitualmente o símbolo " $\vee$ " para "ou" **inclusivo** e o símbolo " $\underline{\vee}$ " para "ou" **exclusivo**.

Assim sendo, a proposição P é a **disjunção inclusiva** ou apenas **disjunção** das proposições simples "Carlos é médico", "Carlos é professor", isto é:

P : Carlos é médico $\vee$ Carlos é professor

ao passo que a proposição Q é a **disjunção exclusiva** das proposições simples "Mario é alagoano", "Mario é gaúcho", isto é:

Q : Mario é alagoano $\underline{\vee}$ Mario é gaúcho

De um modo geral, chama-se **disjunção exclusiva de duas proposições** p e q a proposição representada simbolicamente por "$p \underline{\vee} q$", que se lê: "ou p ou q" ou "p ou q, mas não ambos", cujo **valor lógico** é a **verdade**(V) somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeiras, e a **falsidade**(F) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Logo, o valor lógico da **disjunção exclusiva** de duas proposições é **definido** pela seguinte **tabela-verdade**:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou seja, pelas igualdades:

$$V \veebar V = F, \quad V \veebar F = V, \quad F \veebar V = V, \quad F \veebar F = F$$

e

$$V(p \veebar q) = V(p) \veebar V(q)$$

NOTA — A língua latina tem duas palavras diferentes correspondentes aos **dois sentidos** distintos da palavra "ou" na linguagem comum. A palavra latina "vel" exprime a disjunção no seu sentido **débil** ou **inclusivo**, ao passo que a **palavra latina** "aut" exprime a disjunção no seu sentido **forte ou exclusivo**.

6. CONDICIONAL (→)

Definição — Chama-se **proposição condicional** ou apenas **condicional** uma proposição representada por "se p então q", cujo **valor lógico** é a **falsidade**(F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a **verdade**(V) nos demais casos.

Simbolicamente, a **condicional de duas proposições** p e q indica-se com a notação: "p → q", que também se lê de uma das seguintes maneiras:

(i) p é condição suficiente para q
(ii) q é condição necessária para p

Na condicional "p → q", diz-se que p é o **antecedente** e q o **consequente**. O símbolo " → " é chamado **símbolo de implicação**.

O valor lógico da **condicional** de duas proposições é, portanto, **definido** pela seguinte **tabela-verdade**:

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ou seja, pelas igualdades:

$$V \rightarrow V = V, \quad V \rightarrow F = F, \quad F \rightarrow V = V, \quad F \rightarrow F = V$$

e

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$$

Portanto, uma condicional é verdadeira todas as vezes que o seu **antecedente** é uma proposição falsa.

Exemplos:

(1) p : GALOIS morreu em duelo (V)
q : π é um número real (V)

p → q : Se GALOIS morreu em duelo, então π é um número real (V)
$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$

(2) p : O mes de Maio tem 31 dias (V)
q : A Terra é plana (F)

p → q : Se o mes de Maio tem 31 dias, então a Terra é plana (F)
$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F$

(3) p : DANTE escreveu os Lusíadas (F)
q : CANTOR criou a Teoria dos Conjuntos (V)

p → q : Se DANTE escreveu os Lusíadas, então CANTOR criou a Teoria dos Conjuntos (V)
$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V$

(4) p : SANTOS DUMONT nasceu no Ceará (F)
q : O ano tem 9 meses (F)

p → q : Se SANTOS DUMONT nasceu no Ceará, então o ano tem 9 meses (V)
$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = V$

NOTA — Uma condicional p → q **não afirma** que o consequente q **se deduz** ou é **conseqüência** do antecedente p. Assim, p. ex., as condicionais:

7 é um número ímpar → Brasília é uma cidade
3 + 5 = 9 → SANTOS DUMONT nasceu no Ceará

não estão a afirmar, de modo nenhum, que o fato de "Brasília ser uma cidade" **se deduz** do fato de "7 ser um número ímpar" ou que a proposição "SANTOS DUMONT nasceu no Ceará" é **conseqüência** da proposição "3 + 5 = 9". O que uma condicional afirma é unicamente uma relação entre os valores lógicos do antecedente e do consequente de acordo com a tabela-verdade anterior.

7. BICONDICIONAL (↔)

Definição — Chama-se **proposição bicondicional** ou **apenas bicondicional** uma proposição representada por "p se e somente se q", cujo **valor lógico** é a **verdade**(V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a **falsidade**(F) nos demais casos.

Simbolicamente, a **bicondicional de duas proposições** p e q indica-se com a notação $p \leftrightarrow q$, que também se lê de uma das seguintes maneiras

(i) p é condição necessária e suficiente para q
(ii) q é condição necessária e suficiente para p

O valor lógico da **bicondicional** de duas proposições é, portanto, **definido pela** seguinte **tabela-verdade**

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ou seja, pelas igualdades

$$V \leftrightarrow V = V, \quad V \leftrightarrow F = F, \quad F \leftrightarrow V = F, \quad F \leftrightarrow F = V$$

e

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$$

Portanto, uma bicondicional é verdadeira somente quando também o são as duas condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

Exemplos

(1) p : Roma fica na Europa (V)
q : A neve é branca (V)

$p \leftrightarrow q$: Roma fica na Europa se e somente se a neve é branca (V)
$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$

(2) p : Lisboa é a capital de Portugal (V)
q : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 3$ (F)

$p \leftrightarrow q$: Lisboa é a capital de Portugal se e somente se $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 3$ (F)
$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F$

(3) p : VASCO DA GAMA descobriu o Brasil (F)
q : TIRADENTES foi enforcado (V)

$p \leftrightarrow q$: VASCO DA GAMA descobriu o Brasil se e somente se TIRADENTES foi enforcado (F)
$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$

(4) p : A Terra é plana (F)
q : $\sqrt{2}$ é um número racional (F)

$p \leftrightarrow q$: A Terra é plana se e somente se $\sqrt{2}$ é um número racional (V)
$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V$

EXERCÍCIOS

1 Sejam as proposições p : Está frio e q : Está chovendo. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições

(a) $\sim p$ (b) $p \wedge q$ (c) $p \vee q$
(d) $q \leftrightarrow p$ (e) $p \rightarrow \sim q$ (f) $p \vee \sim q$
(g) $\sim p \wedge \sim q$ (h) $p \leftrightarrow \sim q$ (i) $p \wedge \sim q \rightarrow p$

2 Sejam as proposições p : Jorge é rico e q : Carlos é feliz. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições

(a) $q \rightarrow p$ (b) $p \vee \sim q$ (c) $q \leftrightarrow \sim p$
(d) $\sim p \rightarrow q$ (e) $\sim \sim p$ (f) $\sim p \wedge q \rightarrow p$

3 Sejam as proposições p : Cláudio fala inglês e q : Cláudio fala alemão. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições

(a) $p \vee q$ (b) $p \wedge q$ (c) $p \wedge \sim q$
(d) $\sim p \wedge \sim q$ (e) $\sim \sim p$ (f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

4 Sejam as proposições p : João é gaúcho e q : Jaime é paulista. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições

(a) $\sim(p \wedge \sim q)$ (b) $\sim \sim p$ (c) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(d) $p \rightarrow \sim q$ (e) $\sim p \leftrightarrow \sim q$ (f) $\sim(\sim q \rightarrow p)$

5 Sejam as proposições p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições

(a) Marcos é alto e elegante
(b) Marcos é alto, mas não é elegante
(c) Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante
(d) Marcos não é nem alto e nem elegante
(e) Marcos é alto ou é baixo e elegante
(f) É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante

6. Sejam as proposições p: Suely é rica e q: Suely é feliz. Traduzir para a **linguagem simbólica** as seguintes proposições:

(a) Suely é pobre, mas feliz
(b) Suely é rica ou infeliz
(c) Suely é pobre e infeliz
(d) Suely é pobre ou rica, mas é infeliz

7. Sejam as proposições p: Carlos fala francês, q: Carlos fala inglês e r: Carlos fala alemão. Traduzir para a **linguagem simbólica** as seguintes proposições:

(a) Carlos fala francês ou inglês, mas não fala alemão
(b) Carlos fala francês e inglês, ou não fala francês e alemão
(c) É falso que Carlos fala francês mas que não fala alemão
(d) É falso que Carlos fala inglês ou alemão mas que não fala francês

8. Traduzir para a **linguagem simbólica** as seguintes proposições matemáticas:

(a) x [illegible] ou x > 0
(b) x ≠ 0 e y ≠ 0
(c) x > [illegible] ou x + y [illegible]
(d) $x^2 = x$ [illegible] $x^0 =$ [illegible]

9. Traduzir para a **linguagem simbólica** as seguintes proposições matemáticas:

(a) (x + y [illegible] 0 e z > 0) [illegible] z [illegible] 0
(b) x [illegible] 0 e [illegible] z > x [illegible] z = 0
(c) x ≠ 0 [illegible] (x = 0 e y < 0)
(d) x = y e [illegible] ou (x < y e z = 0)

10. Traduzir para a **linguagem simbólica** as seguintes proposições matemáticas:

(a) Se x > 0 então y [illegible] 2
(b) Se x + y = [illegible] então z [illegible]
(c) Se x [illegible] ou z = 2 então y > [illegible]
(d) Se z > 5 então x ≠ 1 e x ≠ [illegible]
(e) Se x ≠ y então x + z > [illegible] y + z < 5
(f) Se x + y > z e z [illegible] 1 então x + y > [illegible]
(g) Se x < 2 então x [illegible] 1 ou x = 0
(h) y = 4 e se x < y então x < 5

11. **Simbolizar** as seguintes proposições matemáticas:

(a) x é maior que 5 e menor que 7 ou x não é igual a 6
(b) Se x é menor que 5 e maior que 3, então x é igual a 4
(c) x é maior que 1 ou x é menor que 1 e maior que 0

12. Determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) 3 + 2 = 7 e 5 + 5 = 10
(b) 2 + 7 [illegible] 9 e 4 + 8 = 12
(c) sen π = 0 e cos π = 0
(d) 1 > 0 ∧ 2 + 2 = 4
(e) 0 > 1 ∧ $\sqrt{3}$ é irracional
(f) $(\sqrt{-1})^2 = -1$ ∧ π é [illegible]
(g) $\sqrt{2}$ < [illegible] ∧ $\sqrt{5}$ é racional

13. Determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) Roma é a capital da França ou tg45° = 1
(b) FLEMING descobriu a penicilina ou sen30° = $\frac{1}{5}$
(c) $\sqrt{5}$ < 0 ou Londres é a capital da Itália
(d) 2 [illegible] $\sqrt{5}$ ou Recife é a capital do Ceará
(e) $\sqrt{3}$ > 1 ∨ π não é um número real
(f) 2 = 2 ∨ sen90° ≠ tg45°
(g) [illegible] ∨ π [illegible] racional
(h) 3 ≠ 3 ∨ 5 ≠ 5
(i) [illegible] 4 = [illegible] ∨ 13 é um número primo
(j) [illegible] 7 ∨ [illegible] 2 [illegible] 2
(k) [illegible] 0 ∨ tg $\frac{\pi}{4}$ [illegible] 1

14. Determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) Se 3 + 2 = 6 então 4 + 4 = 9
(b) Se 0 < [illegible] então [illegible] é irracional
(c) Se $\sqrt{3}$ > 1 então [illegible] < 2
(d) Se [illegible] = 1 [illegible] 0 então sen30° [illegible]
(e) tg60° = $\sqrt{3}$ → 2 = [illegible]
(f) $\sqrt{3}$ > $\sqrt{2}$ → 2^0 = 2
(g) [illegible] → [illegible] 5
(h) π > 4 → 3 > $\sqrt{5}$

15. Determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) 3 + 4 [illegible] 7 se e somente se 5^3 = 125
(b) 0^2 = 1 se e somente se $(1 + 5)^0$ = 3
(c) [illegible] $\sqrt{8}$ [illegible] 4 se e somente se [illegible] 0
(d) tgπ [illegible] se e somente se senπ [illegible] 0
(e) [illegible] 2 [illegible] π^2 < 20
(f) [illegible] > 0 ↔ π^2 < 0
(g) [illegible] → π é racional
(h) [illegible] ↔ cos $\frac{\pi}{4}$ <
(i) sen90° > 1 ↔ cos20° > [illegible]
(j) [illegible] 1 ↔ $\sqrt{2}$ [illegible] 2

16. Determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições.

(a) Não é verdade que 12 é um número ímpar
(b) Não é verdade que Belém é a capital do Pará
(c) É falso que $2 + 3 = 5$ e $1 + 1 = 3$
(d) É falso que $3 + 3 = 6$ ou $\sqrt{\ } 1$ [illegible] 0
(e) $(1 + 1 = 2 \leftrightarrow 3 + 4 = 5)$
(f) $(1 + 1 = 5 \leftrightarrow 3 + 3 = 1)$
(g) [illegible] $= 4 \rightarrow (3 + 3 = 7 \leftrightarrow 1 + 1 = 4)$
(h) $\sim(2 + 2 \neq 4$ e $3 + 5 = 8)$

17. Determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições

(a) [illegible] sen 30° [illegible] cos 30° [illegible]
(b) $\sim(2^3 \neq 8$ ou $4^2 \neq 4^3$
(c) tg 45° = 2 se e somente se ctg 45° = 3 [illegible]
(d) Brasília é a capital do Brasil e 2^0 [illegible]
(e) [illegible] 3^2 [illegible] $\wedge$ [illegible] $0)$
(f) 3^4 [illegible] $= 0)$
(g) $4^3 \neq 64 \rightarrow \sim(3 + 3$ [illegible]

18. Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente V e F, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições.

(a) $p \wedge \sim q$ (b) $p \vee \sim q$ (c) $\sim p \wedge q$
(d) $\sim p \wedge \sim q$ (e) $\sim p \vee \sim q$ (f) $p \wedge (\sim p \vee q)$

19. Determinar V(p) em cada um dos seguintes casos, sabendo

(a) V(q) = F e V(p ∧ q) = F (b) V(q) = F e V(p ∨ q) = F
(c) V(q) = F e V(p → q) = F (d) V(q) = F e V(q → p) = V
(e) V(q) = V e V(p ↔ q) = F (f) V(q) = F e V(q ↔ p) = V

20. Determinar V(p) e V(q) em cada um dos seguintes casos, sabendo

(a) V(p → q) = V e V(p ∧ q) = F
(b) V(p → q) = V e V(p ∨ q) = F
(c) V(p ↔ q) = V e V(p ∧ q) = V
(d) V(p ↔ q) = V e V(p ∨ q) = V
(e) V(p ↔ q) = F e V(~p ∨ q) = V

Capítulo 3

Construção de Tabelas-Verdade

1. TABELA-VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Dadas várias proposições simples p, q, r, ..., podemos combiná-las pelos conectivos lógicos

$$\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

e construir proposições compostas, tais como:

$$P(p, q) = \sim p \vee (p \rightarrow q)$$
$$Q(p, q) = (p \leftrightarrow \sim q) \wedge q$$
$$R(p, q, r) = (p \rightarrow \sim q \vee r) \wedge \sim (q \vee (p \leftrightarrow \sim r))$$

Então, com o emprego das tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais (Cap. 2):

$$\sim p, \quad p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \rightarrow q, \quad p \leftrightarrow q$$

é possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta dada, tabela-verdade esta que mostrará exatamente os casos em que a proposição composta será verdadeira (V) ou falsa (F), admitindo-se, como é sabido, que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples componentes.

2. NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE

O número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a integram, sendo dado pelo seguinte teorema:

A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

Dem. Com efeito, toda proposição simples tem dois valores lógicos, V e F, que se excluem. Portanto, para uma proposição composta $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ com n proposições simples componentes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ há tantas possibilidades de atribuição dos valores lógicos V e F a tais componentes quantos são os **arranjos com repetição** n a n **dos dois elementos** V e F, isto é, $A_{2,n} = 2^n$, segundo ensina a Análise Combinatória.

3 CONSTRUÇÃO DA TABELA-VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Para a construção **prática** da tabela-verdade de uma proposição composta começa-se por **contar** o número de proposições simples que a integram. Se há n proposições simples componentes, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, então a tabela-verdade contém 2^n linhas. Posto isto, à 1ª proposição simples p_1 atribuem-se $2^n/2 = 2^{n-1}$ valores V seguidos de 2^{n-1} valores F; à 2ª proposição simples p_2 atribuem-se $2^n/4 = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de 2^{n-2} valores F, seguidos de 2^{n-2} valores V, seguidos, finalmente, de 2^{n-2} valores F; e assim por diante. De modo genérico, a k-ésima proposição simples $p_k (k \leq n)$ atribuem-se **alternadamente** $2^n/2^k = 2^{n-k}$ valores V seguidos de igual número de valores F.

No caso, p. ex., de uma proposição composta com **cinco** (5) proposições simples componentes, a tabela-verdade contém $2^5 = 32$ linhas, e os grupos de valores V e F se **alternam** de 16 em 16 para a 1ª proposição simples p_1, de 8 em 8 para a 2ª proposição simples p_2, de 4 em 4 para a 3ª proposição simples p_3, de 2 em 2 para a 4ª proposição simples p_4, e, enfim, de 1 em 1 para a 5ª proposição simples p_5.

4. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \wedge \sim q)$$

1ª Resolução — Forma-se, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições simples componentes p e q. Em seguida, forma-se a coluna para $\sim q$. Depois, forma-se a coluna para $p \wedge \sim q$. Afinal, forma-se a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta dada.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

2ª Resolução — Formam-se primeiro as colunas correspondentes às duas proposições simples p e q. Em seguida, à direita, traça-se uma coluna para cada uma dessas proposições e para cada um dos conectivos que figuram na proposição composta dada.

p	q	$\sim$	(p	$\wedge$	$\sim$	q)
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Depois, numa certa ordem, completam-se essas colunas, escrevendo em cada uma delas os valores lógicos convenientes, no modo abaixo indicado:

p	q	$\sim$	(p	$\wedge$	$\sim$	q)
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F
		4	1	3	2	

Os valores lógicos da proposição composta dada encontram-se na coluna completada em último lugar (coluna 4).

Portanto, os valores lógicos da proposição composta dada correspondentes a todas as possíveis atribuições dos valores lógicos V e F às proposições simples componentes p e q (VV, VF, FV e FF) são V, F, V e V, isto é, simbolicamente:

$$P(VV) = V, \quad P(VF) = F, \quad P(FV) = V, \quad P(FF) = V$$

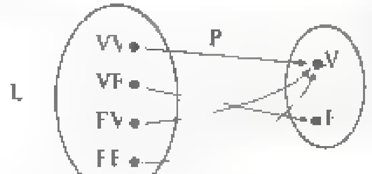
ou seja, abreviadamente:

$$P(VV, VF, FV, FF) = VFVV$$

Observe-se que a proposição P(p, q) associa a cada um dos elementos do conjunto U = {VV, VF, FV, FF} um único elemento do conjunto {V, F}, isto é, P(p, q) outra coisa não é que uma função de U em {V, F}:

$$P(p, q): U \rightarrow \{V, F\}$$

cuja representação gráfica por um diagrama sagital é a seguinte:



3ª Resolução — Resulta de suprimir na tabela-verdade anterior as duas primeiras colunas da esquerda relativas às proposições simples componentes p e q, o que dá a seguinte tabela-verdade simplificada para a proposição composta dada:

	~(p	∧	~	q)
V	V	F	F	V
F	V	V	V	F
V	F	F	F	V
V	F	F	V	F
4	1	3	2	

(2) Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$$

1ª Resolução

p	q	p ∧ q	q ↔ p	~(p ∧ q)	~(q ↔ p)	~(p ∧ q) ∨ ~(q ↔ p)
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

2ª Resolução

p	q	~	(p	∧	q)	∨	~	(q	↔	p)
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F
		3	1	2		4	3		2	1

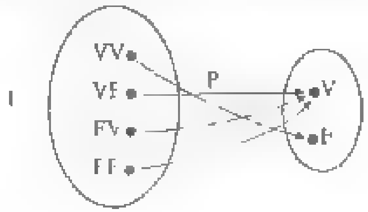
Portanto, simbolicamente:

$$P(VV) = F,\quad P(VF) = V,\quad P(FV) = V,\quad P(FF) = V$$

ou seja, abreviadamente:

$$P(VV, VF, FV, FF) = FVVV$$

Observe-se que P(p, q) outra coisa não é que uma função de U = {VV, VF, FV, FF} em {V, F}, cuja representação gráfica por um diagrama sagital é a seguinte:



3ª Resolução

	~(p	∧	q)	∨	~	(q	↔	p)
F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
3	1	2	1	4	3		2	1

(3) Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q, r) = p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$$

1ª Resolução

p	q	r	~r	p ∨ ~r	q ∧ ~r	p ∨ ~r → q ∧ ~r
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	[illegible]

2ª Resolução

p	q	r	p	∨		r	→	q	∧		r
V	V	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F
			1	3	2	1	4	1	3	2	[illegible]

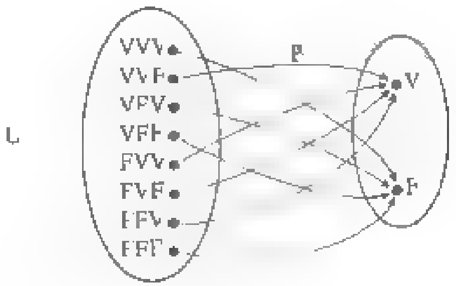
Portanto, simbolicamente:

P(VVV) = F P(VVF) = V P(VFV) = F, P(VFF) = F
P(FVV) = V P(FVF) = V P(FFV) = V P(FFF) = F

ou seja, abreviadamente:

P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = FVFFVVVF

Observe-se que a proposição P(p, q, r) outra coisa não é que uma **função de** U = {VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF} em {V, F}, cuja representação gráfica por um **diagrama sagital** é a seguinte:



3ª Resolução

p	∨		r	→	q	∧	~	r
V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	V	V	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	V	F
1	3	2	1	4	1	3	2	1

(4) Construir a tabela-verdade da proposição

$$P(p, q, r) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Resolução

p	q	r	(p	→	q)	∧	(q	→	r)	→	(p	→	r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
			1	2	1	3		2		4	1	2	1

Portanto, simbolicamente

P(VVV) = V P(VVF) = V P(VFV) = V P(VFF) = V
P(FVV) = V P(FVF) = V P(FFV) = V P(FFF) = V

ou seja, abreviadamente

P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = VVVVVVVV

Observe-se que a última coluna (coluna 4) da **tabela-verdade** da **proposição** $P(p, q, r)$ só encerra a letra V(verdade), isto é, o valor lógico desta proposição é sempre **V** quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes p, q e r.

(5) Construir a tabela-verdade da proposição

$$P(p, q, r) = (p \rightarrow (\sim q \vee r)) \wedge \sim(q \vee (p \leftrightarrow \sim r))$$

Resolução

(p	→	(	q	∨	r))	∧		(q	∨	(p	↔		r))
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	F
V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	F	F	V	F
.	4	2	1	3	1	6	5	1	4	1	3	2	1

Note-se que é uma **tabela-verdade simplificada** da proposição $P(p, q, r)$, pois, não encerra as colunas relativas às proposições componentes p, q e r.

Portanto, simbolicamente

P(VVV) = F, P(VVF) = F, P(VFV) = V, P(VFF) = F
P(FVV) = F, P(FVF) = F, P(FFV) = F, P(FFF) = V

ou seja, abreviadamente

P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) = FFVFFFFV

5. VALOR LÓGICO DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Dada uma proposição composta $P(p, q, r, \ldots)$, pode-se sempre determinar o seu **valor lógico** (V ou F) quando são dados ou conhecidos os valores lógicos respectivos das proposições componentes p, q, r, ...

Exemplos.

(1) Sabendo que os valores lógicos das proposições **p** e **q** são respectivamente V e F, determinar o **valor lógico** (V ou F) da proposição

$$P(p, q) = \sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Resolução Temos, sucessivamente

$V(P) = \sim(V \vee F) \leftrightarrow \sim V \wedge \sim F = \sim V \leftrightarrow F \wedge V = F \leftrightarrow F = V$

(2) Sejam as proposições **p**: $\pi = 3$ e **q**: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0$. Determinar o **valor lógico** (V ou F) da proposição

$$P(p, q) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$$

Resolução As proposições componentes **p** e **q** são ambas **falsas**, isto é, $V(p) = F$ e $V(q) = F$. Portanto

$V(P) = (F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F \wedge F) = V \rightarrow (F \rightarrow F) = V \rightarrow V = V$

(3) Sabendo que $V(p) = V$, $V(q) = F$ e $V(r) = F$, determinar o **valor lógico** (V ou F) da proposição

$$P(p, q, r) = (q \leftrightarrow (r \rightarrow \sim p)) \vee ((\sim q \rightarrow p) \leftrightarrow r)$$

Resolução Temos, sucessivamente

$$\begin{aligned} V(P) &= (F \leftrightarrow (F \rightarrow \sim V)) \vee ((\sim F \rightarrow V) \leftrightarrow F) = \\ &= (F \leftrightarrow (F \rightarrow F)) \vee ((V \rightarrow V) \leftrightarrow F) \\ &= (F \leftrightarrow V) \vee (V \leftrightarrow F) = F \vee F = F \end{aligned}$$

(4) Sabendo que $V(r) = V$, determinar o **valor lógico** (V ou F) da proposição $p \rightarrow \sim q \vee r$.

Resolução Como r é verdadeira(V), a disjunção $\sim q \vee r$ é verdadeira(V). Logo, a condicional dada é verdadeira(V), pois, o seu consequente é verdadeiro (V).

(5) Sabendo que $V(q) = V$, determinar o **valor lógico** (V ou F) da proposição $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

Resolução Como q é verdadeira(V), então $\sim q$ é falsa(F). Logo, a condicional $\sim q \rightarrow \sim p$ é verdadeira(V), pois, o seu antecedente é falso(F). Por consequência, a condicional dada é verdadeira(V), pois, o seu consequente é verdadeiro(V).

(6) Sabendo que as proposições "$x = 0$" e "$x = y$" são **verdadeiras** e que a proposição "$y = z$" é **falsa**, determinar o **valor lógico** (V ou F) da proposição

$$x \neq 0 \vee x \neq y \rightarrow y \neq z$$

Resolução Temos, sucessivamente

$$\sim V \vee \sim V \rightarrow \sim F \Leftrightarrow F \vee F \rightarrow V \Leftrightarrow F \rightarrow V \Leftrightarrow V$$

6. USO DE PARÊNTESIS

É óbvia a necessidade de usar **parêntesis** na simbolização das **proposições**, que devem ser colocados para evitar qualquer tipo de ambiguidade. Assim, p. ex., a expressão $p \wedge q \vee r$ dá lugar, colocando parêntesis, às duas seguintes proposições

$$\text{(i)} \ (p \wedge q) \vee r \quad \text{e} \quad \text{(ii)} \ p \wedge (q \vee r)$$

que não têm o mesmo significado, pois, na (i), o **conectivo principal** é "$\vee$", e na (ii), o **conectivo principal** é "$\wedge$", isto é, a (i) é uma **disjunção** e a (ii) é uma **conjunção**.

Analogamente, a expressão $p \wedge q \rightarrow r \vee s$ dá lugar, colocando parêntesis, às seguintes proposições

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee s, \quad p \wedge ((q \rightarrow r) \vee s), \quad (p \wedge (q \rightarrow r)) \vee s$$
$$p \wedge (q \rightarrow (r \vee s)), \quad (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

tais que, duas quaisquer delas, não têm o mesmo significado.

Por outro lado, em muitos casos, parêntesis podem ser **suprimidos**, a fim de **simplificar** as proposições simbolizadas, desde que, naturalmente, ambiguidade alguma venha a aparecer.

A supressão de parêntesis nas proposições simbolizadas se faz mediante algumas **convenções**, das quais são particularmente importantes as duas seguintes

(I) A "**ordem de precedência**" para os conectivos é

$$(1) \sim \quad (2) \wedge \text{ e } \vee \quad (3) \rightarrow \quad (4) \leftrightarrow$$

Portanto, o conectivo mais "fraco" é "$\sim$" e o conectivo mais "forte" é "$\leftrightarrow$".

Assim, p. ex., a proposição

$$p \rightarrow q \leftrightarrow s \wedge r$$

é uma bicondicional e nunca uma condicional ou uma conjunção. Para convertê-la numa condicional há que usar parêntesis

$$p \rightarrow (q \leftrightarrow s \wedge r)$$

e analogamente, para convertê-la numa conjunção

$$(p \rightarrow q \leftrightarrow s) \wedge r$$

O consequente da condicional é uma bicondicional. Desejando-se converter este consequente numa conjunção cumpre escrever

$$p \rightarrow ((q \leftrightarrow s) \wedge r)$$

Também são bicondicionais as três seguintes proposições.

$$p \wedge q \leftrightarrow r \vee s, \quad p \rightarrow q \leftrightarrow r \wedge s, \quad p \vee q \leftrightarrow \sim r \rightarrow s$$

(II) Quando um mesmo conectivo aparece sucessivamente repetido, suprimem-se os parêntesis, fazendo-se a **associação** a partir da esquerda.

Segundo estas duas convenções, as quatro seguintes proposições

$$((\sim(\sim(p \wedge q))) \vee (\sim p)), \quad ((p \vee (\sim q)) \wedge (r \wedge (\sim p)))$$
$$(((p \vee (\sim q)) \wedge r) \wedge (\sim p)), \quad ((\sim p) \rightarrow (q \rightarrow (\sim(p \vee r))))$$

escrevem-se mais simplesmente assim

$$(p \wedge q) \vee \sim p, \quad (p \vee \sim q) \wedge (r \wedge \sim p)$$
$$(p \vee \sim q) \wedge r \wedge \sim p, \quad \sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim(p \vee r))$$

7. OUTROS SÍMBOLOS PARA OS CONECTIVOS

Nos livros de Lógica, usam-se diferentes símbolos para os conectivos. Assim, p. ex., são frequentemente usados os símbolos.

"$\neg$" para a negação ($\sim$)

"$\bullet$" e "&" para a conjunção ($\wedge$)

"$\supset$" (ferradura) para a condicional ($\rightarrow$)

EXERCÍCIOS

1. Construir as **tabelas-verdade** das seguintes proposições

(a) $\sim(p \vee \sim q)$ (b) $\sim(p \rightarrow \sim q)$

(c) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ (d) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(e) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$ (f) $q \leftrightarrow \sim q \wedge p$

(g) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$ (h) $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$

2. Construir as tabelas-verdade das seguintes proposições:

(a) $\sim p \wedge r \rightarrow q \vee \sim r$ (b) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \sim r$
(c) $p \rightarrow (p \rightarrow \sim r) \leftrightarrow q \vee r$ (d) $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\sim p \leftrightarrow q \vee \sim r)$

3. Determinar P(VV, VF, FV, FF) em cada um dos seguintes casos:

(a) $P(p, q) = \sim(\sim p \leftrightarrow q)$
(b) $P(p, q) = \sim p \vee q \rightarrow p$
(c) $P(p, q) = (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
(d) $P(p, q) = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
(e) $P(p, q) =$ [illegible]
(f) $P(p, q) =$ [illegible]
(g) $P(p, q) = (p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$

4. Determinar P(VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF) em cada um dos seguintes casos:

(a) $P(p, q, r) = p \vee (q \wedge r)$
(b) $P(p, q, r) = (p \wedge \sim q) \vee r$
(c) $P(p, q, r) = \sim p \vee (q \wedge \sim r)$
(d) $P(p, q, r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(e) $P(p, q, r) = (p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim r)$
(f) $P(p, q, r) = \sim(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$

5. Determinar P(VFV) em cada um dos seguintes casos:

(a) $P(p, q, r) = p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$
(b) $P(p, q, r) = \sim p \wedge (q \vee \sim r)$
(c) $P(p, q, r) = \sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \vee \sim r)$
(d) $P(p, q, r) = (r \wedge (p \vee \sim q)) \wedge \sim(\sim r \vee (p \wedge q))$
(e) $P(p, q, r) = (p \vee q \rightarrow r) \rightarrow q \vee \sim r$
(f) $P(p, q, r) = (p \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge (\sim p \vee r \leftrightarrow \sim q)$

6. Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q são respectivamente F e V, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$(p \wedge (\sim q \rightarrow p)) \wedge \sim((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow q \vee \sim p)$$

7. Sejam as proposições $p: \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ e $q: \pi < 3$. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ (b) $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$
(c) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (d) $(p \vee (\sim p \rightarrow q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

8. Sabendo que os valores lógicos das proposições p, q e r são respectivamente V, F e F, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(p \leftrightarrow p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ (b) $(p \rightarrow$ [illegible]
(c) $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

9. Sabendo que as proposições p e q são verdadeiras e que as proposições r e s são falsas, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $p \wedge q \rightarrow r$ (b) $r \vee s \rightarrow q$
(c) $q \leftrightarrow p \wedge s$ (d) $p \rightarrow \sim(r \wedge s)$
(e) $(q \rightarrow s) \rightarrow r$ (f) $\sim r \rightarrow p \wedge q$
(g) $(q \vee r) \wedge (p \vee s)$ (h) $(r \rightarrow s) \wedge (p \wedge q)$
(i) $(p \wedge$ [illegible] $q) \vee r$ (j) $\sim((r \rightarrow p) \vee (s \rightarrow q))$
(k) [illegible] $(p \rightarrow q)$ (l) $r \rightarrow q \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow r)$

10. Sabendo que os valores lógicos das proposições p, q, r e s são respectivamente V, V, F e F, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $p \rightarrow q \leftrightarrow q \rightarrow p$ (b) $(r \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow r)$
(c) $(p \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim r)$ (d) $\sim(p \wedge q)$ [illegible]
(e) $\sim(p \wedge s) \rightarrow \sim p \wedge \sim s$ (f) $\sim((p \vee s) \wedge (s \vee r))$

11. Sabendo que V(p) = V(r) = V e V(q) = V(s) = F, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $p \wedge q \leftrightarrow r \wedge \sim s$ (b) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (s \leftrightarrow r)$
(c) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (s \rightarrow r)$ (d) [illegible]
(e) [illegible] (f) [illegible]
(g) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \rightarrow p \vee s$ (h) [illegible]

12. Sabendo que as proposições "x = 0" e "x = y" são verdadeiras e que as proposições "y = z" e "y = t" são falsas, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $x = 0 \wedge x = y \rightarrow y \neq z$ (b) $x \neq 0 \vee y = t \rightarrow y = z$
(c) $x \neq y \vee y \neq z \rightarrow y = t$ (d) $x \neq 0 \vee x \neq y \rightarrow y \neq z$
(e) $x = 0 \rightarrow (x \neq y \vee y \neq t)$

13. Sabendo que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira (V), determinar o valor lógico (V ou F) das condicionais:

$$p \vee r \rightarrow q \vee r \quad \text{e} \quad p \wedge r \rightarrow q \wedge r$$

14 Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições.

(a) $p \leftrightarrow q \wedge \sim r$, sabendo que V(p) = V(r) = V
(b) $p \wedge q \rightarrow p \vee r$, sabendo que V(p) = V(r) = V
(c) $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$, sabendo que V(q) = F e V(r) = V

15 Suprimir o maior número possível de parêntesis nas seguintes proposições

(a) $((q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim(\sim q))))$
(b) $((p \wedge (\sim(\sim q))) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (r \vee q)))$
(c) $(((p \vee q) \rightarrow (\sim r)) \vee (((\sim q) \wedge r) \wedge q))$

Capítulo 4

Tautologias, Contradições e Contingências

1. TAUTOLOGIA

Definição — Chama-se **tautologia** toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V (verdade).

Em outros termos, **tautologia** é toda proposição composta P(p, q, r, ...) cujo valor lógico é sempre V (verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, ...

As tautologias são também denominadas **proposições tautológicas** ou **proposições logicamente verdadeiras**.

É imediato que as proposições p → p e p ↔ p são **tautológicas** (**Princípio de identidade para as proposições**).

Exemplos

(1) A proposição "~(p ∧ ~p)" (**Princípio da não contradição**) é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	~p	p ∧ ~p	~(p ∧ ~p)
V	F	F	V
F	V	F	V

Portanto, **dizer que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro.**

(2) A proposição "p ∨ ~p" (Princípio do terceiro excluído) é tautológica, como [illegible] se vê pela sua tabela-verdade

p	~p	p ∨ ~p
V	F	V
F	V	V

Portanto, dizer que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.

(3) A proposição "p ∨ ~(p ∧ q)" é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade

p	q	p ∧ q	~(p ∧ q)	p ∨ ~(p ∧ q)
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

(4) A proposição "p ∧ q → (p ↔ q)" é tautológica, conforme mostra a sua tabela-verdade

p	q	p ∧ q	p ↔ q	p ∧ q → (p ↔ q)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

(5) A proposição "p ∨ (q ∧ ~q) ↔ p" é tautológica, conforme mostra a sua tabela-verdade

p	q	~q	q ∧ ~q	p ∨ (q ∧ ~q)	p ∨ (q ∧ ~q) ↔ p
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V

(6) A proposição "p ∧ r → ~q ∨ r" é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade

p	q	r	~q	p ∧ r	~q ∨ r	p ∧ r → ~q ∨ r
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

(7) A proposição "((p → q) → r) → (p → (q → r))" é tautológica, conforme mostra a sua tabela-verdade

((p	→	q)	→	r)	→	(p	→	(q	→	r))
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	[illegible]	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	F
			3		4	1	3	1		1

2. PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO PARA AS TAUTOLOGIAS

Seja P(p, q, r, ...) uma tautologia e sejam P_0(p, q, r, ...), Q_0(p, q, r, ...), R(p, q, r, ...) proposições quaisquer.

Como o valor lógico de P(p, q, r, ...) é sempre V(verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, ..., é óbvio que substituindo p por P_0, q por Q_0, r por R_0, ..., na tautologia P(p, q, r, ...), a nova proposição P(P_0, Q_0, R_0, ...) que assim se obtém também é uma tautologia. Subsiste, pois, para as tautologias o chamado "Princípio de substituição" seguinte:

Se P(p, q, r, ...) é uma tautologia, então P(P_0, Q_0, R_0, ...) também é uma tautologia, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, ...

3. CONTRADIÇÃO

Definição — Chama-se **contradição** toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra F (falsidade).

Em outros termos, **contradição** é toda proposição composta $P(p, q, r, ...)$ cujo valor lógico é sempre F (falsidade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, ...

Como uma tautologia é sempre verdadeira (V), a negação de uma tautologia é sempre falsa (F), ou seja, é uma contradição e vice-versa.

Portanto, $P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia se e somente se $\sim P(p, q, r, ...)$ é uma contradição e $P(p, q, r, ...)$ é uma contradição se e somente se $\sim P(p, q, r, ...)$ é uma tautologia.

As contradições são também denominadas **proposições contraválidas** ou **proposições logicamente falsas**.

Para as contradições vale um **"Princípio de substituição"** análogo ao que foi dado para as tautologias:

Se $P(p, q, r, ...)$ **é uma contradição, então** $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ **também é uma contradição, quaisquer que sejam as proposições** $P_0, Q_0, R_0, ...$

Exemplos:

(1) A proposição "**p ∧ ~p**" é uma **contradição**, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	~p	p ∧ ~p
V	F	F
F	V	F

Portanto, **dizer que uma proposição pode ser simultâneamente verdadeira e falsa é sempre falso.**

(2) A proposição "p ↔ ~p" é uma **contradição**, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	~p	p ↔ ~p
V	F	F
F	V	F

(3) A proposição "(p ∧ q) ∧ ~(p ∨ q)" é uma **contradição**, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	q	p ∧ q	p ∨ q	~(p ∨ q)	(p ∧ q) ∧ ~(p ∨ q)
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

(4) A proposição "~p ∧ (p ∧ ~q)" é uma **contradição**, conforme mostra a sua tabela-verdade:

p	q	~p	~q	p ∧ ~q	~p ∧ (p ∧ ~q)
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

4. CONTINGÊNCIA

Definição — Chama-se **contingência** toda a proposição composta em cuja última coluna da sua tabela-verdade figuram as letras **V** e **F** cada uma pelo menos uma vez.

Em outros termos, **contingência** é toda proposição composta que não é tautologia nem contradição.

As contingências são também denominadas **proposições contingentes** ou **proposições indeterminadas**.

Exemplos:

(1) A proposição "p → ~p" é uma **contingência**, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	~p	p → ~p
V	F	F
F	V	V

(2) A proposição "$p \vee q \rightarrow p$" é uma **contingência**, conforme mostra a sua tabela-verdade

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

(3) A proposição "$x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$" é uma **contingência**, conforme mostra a sua tabela-verdade

$x = 3$	$x = y$	$x \neq 3$	$x \neq y$	$x \neq y \rightarrow x \neq 3$	$x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que as seguintes proposições são **tautológicas**:

(a) $(p \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \sim p)$
(b) $(p \leftrightarrow p \wedge \sim p) \leftrightarrow \sim p$
(c) $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
(d) $p \vee (q \vee \sim p)$
(e) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$
(f) $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$
(g) $p \leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$
(h) $\sim(p \vee \sim p) \vee (q \vee \sim q)$
(i) $\sim(p \wedge \sim p) \vee (q \rightarrow \sim q)$
(j) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
(k) $\sim(p \vee q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
(l) $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

2. Mostrar que as seguintes proposições são **tautológicas**:

(a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$
(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$
(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$
(d) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$

3. Mostrar que as seguintes proposições são **contingentes**:

(a) $p \vee q \rightarrow p \wedge q$
(b) $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$
(c) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
(d) $p \rightarrow (p \rightarrow q \wedge \sim q)$

4. Determinar quais das seguintes proposições são **tautológicas**, **contraválidas**, ou **contingentes**:

(a) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$
(b) $\sim p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$
(c) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$
(d) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow q) \rightarrow p$
(e) $p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$
(f) $\sim p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow q)$
(g) $p \rightarrow (p \vee q) \vee r$
(h) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$

Capítulo 5

Implicação Lógica

1. DEFINIÇÃO DE IMPLICAÇÃO LÓGICA

Definição — Diz-se que uma proposição P(p, q, r, ...) **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição Q(p, q, r, ...), se Q(p, q, r, ...) é verdadeira (V) todas as vezes que P(p, q, r, ...) é verdadeira (V).

Em outros termos, uma proposição P(p, q, r, ...) **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição Q(p, q, r, ...) todas as vezes que nas respectivas tabelas-verdade dessas duas proposições **não aparece V** na última coluna de P(p, q, r, ...) e F na última coluna de Q(p, q, r, ...), com V e F em uma mesma linha, isto é, não ocorre P(p, q, r, ...) e Q(p, q, r, ...) com valores lógicos simultâneos respectivamente V e F.

Indica-se que a proposição P(p, q, r, ...) **implica** a proposição Q(p, q, r, ...) com a notação:

$$P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$$

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

2. PROPRIEDADES DA IMPLICAÇÃO LÓGICA

É imediato que a relação de implicação lógica entre proposições goza das propriedades **reflexiva** (R) e **transitiva** (T), isto é, simbolicamente:

(R) $P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow P(p, q, r, \ldots)$

(T) Se $P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$ e
$Q(p, q, r, \ldots) \Rightarrow R(p, q, r, \ldots)$, então
$P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow R(p, q, r, \ldots)$

3 EXEMPLIFICAÇÃO

(1) As tabelas-verdade das proposições:

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \leftrightarrow q$$

são

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p ↔ q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

A proposição "p ∧ q" é verdadeira(V) somente na linha 1 e, nesta linha, as proposições "p ∨ q" e "p ↔ q" também são verdadeiras(V). Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, isto é

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q \quad \text{e} \quad p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

As mesmas tabelas-verdade também demonstram as importantes **Regras de inferência**

(i) $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ (Adição)
(ii) $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$ (Simplificação)

(2) As tabelas-verdade das proposições

$$p \leftrightarrow q, \quad p \rightarrow q, \quad q \rightarrow p$$

são

p	q	p ↔ q	p → q	q → p
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

A proposição "p ↔ q" é verdadeira(V) nas Linhas 1 e 4 e, nestas linhas, as proposições "p → q" e "q → p" também são verdadeiras. Logo, a primeira proposição **implica** cada uma das outras duas proposições, isto é

$$p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q \quad \text{e} \quad p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$$

(3) A tabela-verdade da proposição "(p ∨ q) ∧ ~p" é

p	q	p ∨ q	~p	(p ∨ q) ∧ ~p
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Esta proposição é verdadeira(V) somente na linha 3 e, nesta linha, a proposição "q" também é verdadeira(V). Logo, subsiste a **implicação lógica**

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$$

denominada **Regra do Silogismo disjuntivo**.

Outra forma desta importante **Regra de inferência** é

$$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$$

(4) A tabela-verdade da proposição "(p → q) ∧ p" é

p	q	p → q	(p → q) ∧ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Esta proposição é verdadeira(V) somente na linha 1 e, nesta linha, a proposição "q" também é verdadeira(V). Logo, subsiste a **implicação lógica**

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

denominada **Regra Modus ponens**.

(5) As tabelas-verdade das proposições "(p → q) ∧ ~q" e "~p" são

p	q	p → q	~q	(p → q) ∧ ~q	~p
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

A proposição "$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$" é verdadeira(V) somente na linha 4, e nesta linha, a proposição "$\sim p$" também é verdadeira(V). Logo, subsiste a implicação lógica

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

denominada **Regra Modus tollens**.

As mesmas tabelas-verdade também mostram que "$\sim p$" **implica** "$p \rightarrow q$", isto é: $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$.

4. TAUTOLOGIAS E IMPLICAÇÃO LÓGICA

Teorema — A proposição $P(p, q, r, \ldots)$ **implica** a proposição $Q(p, q, r, \ldots)$, isto é:

$$P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$$

se e somente se a condicional:

$$P(p, q, r, \ldots) \rightarrow Q(p, q, r, \ldots) \qquad (1)$$

é tautológica.

Dem. — (i) Se $P(p, q, r, \ldots)$ **implica** $Q(p, q, r, \ldots)$, então, não ocorre que os valores lógicos simultâneos destas duas proposições sejam respectivamente V e F, e por conseguinte a última coluna da tabela-verdade da condicional (1) encerra somente a letra V, isto é, essa condicional é tautológica.

(ii) Reciprocamente, se a condicional (1) é **tautológica**, isto é, se a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V, então, não ocorre que os valores lógicos simultâneos das proposições $P(p, q, r, \ldots)$ e $Q(p, q, r, \ldots)$ sejam respectivamente V e F, e por conseguinte a primeira proposição **implica** a segunda.

Portanto, a toda **implicação lógica** corresponde uma **condicional tautológica** e vice-versa.

Corolário — Se $P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$, então, também se tem:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \ldots) \Rightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$$

quaisquer que sejam as proposições $P_0, Q_0, R_0, \ldots$

NOTA — Os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ **são distintos**, pois, o **primeiro é de operação lógica** (aplicado, p. ex., às proposições p e q dá a nova proposição $p \rightarrow q$), enquanto que o segundo é **de relação** (estabelece que a condicional $P(p, q, r, \ldots) \rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$ é tautológica).

Exemplos

(1) A condicional "$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$" é **tautológica**, pois, a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V (Cap. 3, § 4, Ex. 4). Logo, subsiste a **implicação lógica**:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$$

denominada **Regra do Silogismo hipotético**.

(2) A condicional "$p \wedge \sim p \rightarrow q$" é **tautológica**, pois, a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V:

p	q	~p	p ∧ ~p	p ∧ ~p → q
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Logo, subsiste a **implicação lógica** $p \wedge \sim p \Rightarrow q$. Assim, **de uma contradição** $p \wedge \sim p$ **se deduz qualquer proposição** q (Princípio da inconsistência).

(3) A proposição "$(p \leftrightarrow q) \wedge p$" **implica** a proposição "q", pois, a condicional "$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$" é **tautológica** conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	q	p ↔ q	(p ↔ q) ∧ p	(p ↔ q) ∧ p → q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que a proposição p **implica** a proposição q ($p \Rightarrow q$) em cada um dos seguintes casos:

(a) p: $\pi > 3$; q: $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$

(b) p: $\operatorname{sen} 30^\circ = 1/2$; q: $\sqrt{2} > \sqrt{3}$

(c) p: ABCD é um losango; q: ABCD é um paralelogramo

(d) p: O polígono ABCDE ... é regular; q: O polígono ABCDE ... é inscritível

(e) p: O número inteiro x termina por 0; q: O número inteiro x é divisível por 5

(f) p: ABC é um triângulo; q: A soma dos ângulos internos A, B e C é igual a 180°

(g) p: $\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$; q: $\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \cos\ \frac{\pi}{3}$

2. Mostrar: (a) $q \Rightarrow p \rightarrow q$ (b) $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$

3. Mostrar que $p \leftrightarrow q$ não implica $p \rightarrow q$.
Resolução As tabelas-verdade das duas proposições dadas são

p	q	~q	p ↔ ~q	p → q
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V

A proposição "$p \leftrightarrow \sim q$" é verdadeira(V) na linha 2 e, nesta linha, a proposição "$p \rightarrow q$" é falsa(F). Logo, a primeira proposição não implica a segunda.

4. Mostrar que p não implica $p \wedge q$ e que $p \vee q$ não implica p.

5. Mostrar: $(x = y \vee x < 4) \wedge x \nless 4 \Rightarrow x = y$

6. Mostrar: $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge x \neq y \Rightarrow x = 0$

Capítulo 6

Equivalência Lógica

1. DEFINIÇÃO DE EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Definição Diz-se que uma proposição P(p, q, r, ...) é **logicamente equivalente** ou apenas **equivalente** a uma proposição Q(p, q, r, ...), se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.

Indica-se que a proposição P(p, q, r, ...) é **equivalente** a proposição Q(p, q, r, ...) com a notação

$$P(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \ldots)$$

Em particular, se as proposições P(p, q, r, ...) e Q(p, q, r, ...) são ambas **tautologias** ou são ambas **contradições**, então são **equivalentes**.

2. PROPRIEDADES DA EQUIVALÊNCIA LÓGICA

É imediato que a relação de equivalência lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva(R), simétrica(S) e transitiva(T), isto é, simbolicamente

(R) $P(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow P(p, q, r, \ldots)$

(S) Se $P(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \ldots)$, então
$Q(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow P(p, q, r, \ldots)$

(T) Se $P(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \ldots)$ e
$Q(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow R(p, q, r, \ldots)$, então
$P(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow R(p, q, r, \ldots)$

3. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) As proposições "~ ~ p" e "p" são equivalentes, isto é, simbolicamente ~ ~ p ⟺ p (**Regra da dupla negação**). Realmente, é o que demonstra a tabela-verdade

p	~p	~ ~p
V	F	V
F	V	F

Portanto a dupla negação equivale a afirmação.

(2) As proposições "~ p → p" e "p" são equivalentes, isto é, simbolicamente ~ p → p ⟺ p (Regra de CLAVIUS). Realmente, é o que demonstra a tabela-verdade

p	~p	~p → p
V	F	V
F	V	F

(3) As condicionais "p → p ∧ q" e "p → q" têm tabelas-verdade idênticas

p	q	p ∧ q	p → p ∧ q	p → q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Por consequência, estas condicionais são equivalentes, isto é, subsiste a equivalência lógica

$$p \to p \wedge q \iff p \to q$$

denominada **Regra de absorção**.

(4) A condicional "p → q" e a disjunção "~ p ∨ q" têm tabelas-verdades idênticas.

p	q	p → q	~p	~p ∨ q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Por consequência, estas duas proposições são equivalentes, isto é, subsiste a importante equivalência lógica

$$p \to q \iff \sim p \vee q$$

(5) A bicondicional "p ↔ q" e a conjunção "(p → q) ∧ (q → p)" têm tabelas-verdade idênticas

p	q	p ↔ q	p → q	q → p	(p → q) ∧ (q → p)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Por consequência, estas duas proposições são equivalentes, isto é, subsiste a importante equivalência lógica

$$p \leftrightarrow q \iff (p \to q) \wedge (q \to p)$$

(6) A bicondicional "p ↔ q" e a disjunção "(p ∧ q) ∨ (~ p ∧ ~ q)" têm tabelas-verdade idênticas

p	q	p ↔ q	(p	∧	q)	∨	(~p	∧	~q)
V	V	V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	V	V	V

Por consequência, estas duas proposições são equivalentes, isto é, subsiste a importante equivalência lógica

$$p \leftrightarrow q \iff (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

4. TAUTOLOGIAS E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Teorema — A proposição P(p, q, r, …) é equivalente à proposição Q(p, q, r, …), isto é

$$P(p, q, r, \ldots) \iff Q(p, q, r, \ldots)$$

se e somente se a bicondicional

$$P(p, q, r, \ldots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \ldots) \qquad (1)$$

é tautológica.

Dem. (i) Se as proposições P(p, q, r, ...) e Q(p, q, r, ...) são **equivalentes**, então, têm tabelas-verdade idênticas, e por conseguinte o valor lógico da bicondicional (1) é sempre V(verdade), isto é, (1) é **tautológica**.

(ii) Reciprocamente, se a bicondicional (1) é **tautológica**, então a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade), e por conseguinte os valores lógicos respectivos das proposições P(p, q, r, ...) e Q(p, q, r, ...) são ambos V(verdade) ou são ambos F(falsidade), isto é, estas duas proposições são **equivalentes**.

Portanto, a toda equivalência lógica corresponde uma bicondicional tautológica e vice-versa.

Corolário Se P(p, q, r, ...) ⟺ Q(p, q, r, ...), então também se tem

$$P(P_0, Q_0, R_0, \ldots) \Longleftrightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$$

quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, ...

NOTA Os símbolos ⟷ e ⟺ são distintos, pois o primeiro **é de operação lógica** (aplicado, p. ex., às proposições p e q dá a nova proposição p ⟷ q), enquanto que o segundo é de relação (estabelece que a bicondicional P(p, q, r, ...) ⟷ Q(p, q, r, ...) é tautológica).

Exemplos

(1) A bicondicional "(p ∧ ~q → c) ⟷ (p → q)", onde c é uma proposição cujo valor lógico é F(falsidade), é **tautológica**, pois a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade):

p	q	(p	∧	~q	→	c)	⟷	(p	→	q)
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	V	F	V	F
		1	3	2	4	1	5	1	2	1

Portanto, as proposições "p ∧ ~q → c" e "p → q" são **equivalentes**, isto é, simbolicamente:

$$p \wedge \sim q \rightarrow c \Longleftrightarrow p \rightarrow q$$

Nesta equivalência consiste o **"Método de demonstração por absurdo".**

(2) A bicondicional "(p ∧ q → r) ⟷ (p → (q → r))" é **tautológica**, pois a última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade):

(p	∧	q	→	r)	⟷	(p	→	(q	→	r))
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F
1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	1

Portanto, as condicionais "p ∧ q → r" e "p → (q → r)" são **equivalentes**, isto é, simbolicamente:

$$p \wedge q \rightarrow r \Longleftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Esta importante equivalência lógica é denominada **"Regra de Exportação-Importação"**.

(3) As proposições "x = 1 ∨ x < 3" e "~(x < 3 ∧ x = 1)" **não são equivalentes**, pois, a bicondicional

$$(x = 1 \vee x < 3) \leftrightarrow \sim(x < 3 \wedge x = 1)$$

não é tautológica, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

(x = 1	∨	x < 3)	⟷	~	(x < 3	∧	x = 1)
V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F

5. PROPOSIÇÕES ASSOCIADAS A UMA CONDICIONAL

Definição Dada a condicional p → q, chamam-se **proposições associadas** a p → q as três seguintes proposições condicionais que contêm p e q:

(a) **Proposição recíproca de p → q**: q → p
(b) **Proposição contrária de p → q**: ~p → ~q
(c) **Proposição contrapositiva de p → q**: ~q → ~p

As tabelas-verdade destas quatro proposições são

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

e demonstram as duas importantes propriedades:

(I) A condicional $p \rightarrow q$ e a sua contrapositiva $\sim q \rightarrow \sim p$ **são equivalentes**, isto é, simbolicamente

$$p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

(II) A recíproca $q \rightarrow p$ e a contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ da condicional $p \rightarrow q$ **são equivalentes**, isto é, simbolicamente

$$q \rightarrow p \Longleftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$$

As mesmas tabelas-verdade também demonstram que a condicional $p \rightarrow q$ e a sua recíproca $q \rightarrow p$ ou a sua contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ não são equivalentes.

A contrária de $p \rightarrow q$ também é denominada a **inversa** de $p \rightarrow q$ e a contrapositiva de $p \rightarrow q$ outra coisa não é que a contrária da recíproca de $p \rightarrow q$ e por isso também é denominada **contra-recíproca** de $p \rightarrow q$. Também se diz que $p \rightarrow q$ é a **direta** em relação às associadas.

Exemplos

(1) Seja a condicional relativa a um triângulo T

$p \rightarrow q$: Se T é equilátero, então T é isósceles

A **recíproca** desta proposição é:

$q \rightarrow p$: Se T é isósceles, então T é equilátero

Aqui, a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira(V), mas a sua recíproca $q \rightarrow p$ é falsa(F).

(2) A **contrapositiva** da condicional

$p \rightarrow q$: Se Carlos é professor, então é pobre

é

$\sim q \rightarrow \sim p$: Se Carlos não é pobre, então não é professor

(3) Seja achar a **contrapositiva** da condicional: "Se x é menor que zero, então x não é positivo".

Representando por p a proposição "x é menor que zero" e por q a proposição "x é positivo", a condicional dada sob forma simbólica escreve-se $p \rightarrow \sim q$, e por conseguinte a sua **contrapositiva** é

$$\sim\sim q \rightarrow \sim p \Longleftrightarrow q \rightarrow \sim p$$

isto é, em linguagem corrente: "Se x é positivo, então x não é menor que zero".

(4) Seja demonstrar a proposição condicional:

$p \rightarrow q$: Se x^2 é ímpar, então x é ímpar

A **contrapositiva** desta condicional é

$\sim q \rightarrow \sim p$: Se x é par, então x^2 é par

que vamos demonstrar ser verdadeira.

Com efeito, supondo x par, isto é, $x = 2n$ ($n \in Z$), ..., segue-se que x^2 é par. Logo, a **contrapositiva** é verdadeira e por conseguinte a proposição condicional dada $p \rightarrow q$ também é verdadeira.

(5) Determinar:

(a) A contrapositiva da contrapositiva de $p \rightarrow q$
(b) A contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow q$
(c) A contrapositiva da contrária de $p \rightarrow q$

Resolução: (a) A contrapositiva de $p \rightarrow q$ é $\sim q \rightarrow \sim p$. E a contrapositiva de $\sim q \rightarrow \sim p$ é $\sim\sim p \rightarrow \sim\sim q \Longleftrightarrow p \rightarrow q$.
(b) A recíproca de $p \rightarrow q$ é $q \rightarrow p$. E a contrapositiva de $q \rightarrow p$ é $\sim p \rightarrow \sim q$.
(c) A contrária de $p \rightarrow q$ é $\sim p \rightarrow \sim q$. E a contrapositiva de $\sim p \rightarrow \sim q$ é $\sim\sim q \rightarrow \sim\sim p \Longleftrightarrow q \rightarrow p$.

Observe-se que a recíproca e a contrária são cada uma a contrapositiva da outra e que a condicional e a contrapositiva são cada uma a contrapositiva da outra.

(6) Determinar:

(a) A contrapositiva de $p \rightarrow \sim q$
(b) A contrapositiva de $\sim p \rightarrow q$
(c) A contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow \sim q$
(d) A recíproca da contrapositiva de $\sim p \rightarrow \sim q$

Resolução (a) A contrapositiva de $p \to \sim q$ é

$$\sim\sim q \to \sim p \Leftrightarrow q \to \sim p$$

b) A contrapositiva de $\sim p \to q$ é

$$\sim q \to \sim\sim p \Leftrightarrow \sim q \to p$$

c) A recíproca de $p \to \sim q$ é $\sim q \to p$. E a contrapositiva de $\sim q \to p$ é.

$$\sim p \to \sim\sim q \Leftrightarrow \sim p \to q$$

d) A contrapositiva de $\sim p \to \sim q$ é

$$\sim\sim q \to \sim\sim p \Leftrightarrow q \to p$$

E a recíproca de $q \to p$ é $p \to q$.

(7) Determinar

(a) A contrapositiva da recíproca de $x = 0 \to x < 1$
(b) A contrapositiva da contrária de $x < 1 \to x < 3$

Resolução (a) A recíproca de $x = 0 \to x < 1$ é $x < 1 \to x = 0$. E a contrapositiva desta recíproca é $x \neq 0 \to x \nless 1$.
(b) A contrária de $x < 1 \to x < 3$ é $x \nless 1 \to x \nless 3$. E a contrapositiva desta contrária é $x < 3 \to x < 1$.

6 NEGAÇÃO CONJUNTA DE DUAS PROPOSIÇÕES

Definição Chama-se **negação conjunta** de duas proposições p e q a proposição "não p e não q", isto é, simbolicamente "$\sim p \wedge \sim q$".
A **negação conjunta** de duas proposições p e q também se indica pela notação "$p \downarrow q$". Portanto, temos

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Como a proposição "$\sim p \wedge \sim q$" é verdadeira somente no caso em que p e q são ambas falsas, então, a tabela-verdade de "$p \downarrow q$" é a seguinte

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

7. NEGAÇÃO DISJUNTA DE DUAS PROPOSIÇÕES

Definição Chama-se **negação disjunta** de duas proposições p e q a proposição "não p ou não q", isto é, simbolicamente "$\sim p \vee \sim q$".
A **negação disjunta** de duas proposições p e q também se indica pela notação "$p \uparrow q$". Portanto, temos

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Como a proposição "$\sim p \vee \sim q$" é falsa somente no caso em que p e q são ambas verdadeiras, então, a tabela-verdade de "$p \uparrow q$" é a seguinte

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Os símbolos "$\downarrow$" e "$\uparrow$" são chamados "**conectivos de SCHEFFER**"

EXERCÍCIOS

1 Mostrar que as proposições p e q são **equivalentes** ($p \Leftrightarrow q$) em cada um dos seguintes casos

(a) p: $1 + 3 = 4$, q: $(1 + 3)^2 = 16$
(b) p: $\operatorname{sen} 0^\circ =$ [illegible] q: $\cos 0^\circ = 0$
(c) p: $2^0 = 1$, q: $\pi < 4$
(d) p: $x = y$ q: $x + z = y + z$ $(x, y, z \in R)$
(e) p: x é par, q: $x + 1$ é ímpar $(x \in Z)$
(f) p: O triângulo ABC é isosceles (AB = AC), q: Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são iguais
(g) p: $a \perp b$, q: $b \perp a$
(h) p: $a \parallel b$, q: $b \parallel a$
(i) p: O triângulo ABC é retângulo em A, q: $a^2 = b^2 + c^2$
(j) p: $x \in \{a\}$, q: $x = a$

2. Exprimir a bicondicional $p \leftrightarrow q$ em função dos três conectivos: $\wedge$, $\vee$ e $\sim$.
Resolução. Temos:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$
$$q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim q \vee p$$

Portanto: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

3. Demonstrar por tabelas-verdade as seguintes equivalências:

(a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
(c) $p \leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ (d) $q \leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
(e) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$ (f) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$
(g) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$

4. Mostrar que as proposições "$x = 1 \vee x < 3$" e "$\sim(x < 3 \wedge x = 1)$" não são equivalentes.

5. Demonstrar que o conectivo "$\veebar$" ("ou" exclusivo) exprime-se em função dos três conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$ do seguinte modo:

$$p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

Dem. Com efeito, as tabelas-verdade de "$p \veebar q$" e "$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$" são idênticas:

p	q	p ⊻ q	(p	∨	q)	∧	~	(p	∧	q)
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V	F	F	F
				2	1	4	3	1	2	

6. Demonstrar que os três conectivos $\sim$, $\vee$ e $\wedge$ exprimem-se em função do conectivo "$\downarrow$" de SCHEFFER do seguinte modo:

(a) $\sim p \Leftrightarrow p \downarrow p$
(b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
(c) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

Dem. Realmente, é o que demonstram as três tabelas-verdade seguintes:

(a)

p	~p	p ↓ p
V	F	F
F	V	V

(b)

p	q	p ∨ q	p ↓ q	(p ↓ q) ↓ (p ↓ q)
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	F

(c)

p	q	p ∧ q	p ↓ p	q ↓ q	(p ↓ p) ↓ (q ↓ q)
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F

7. Demonstrar por tabelas-verdade que os três conectivos $\sim$, $\vee$ e $\wedge$ exprimem-se em função do conectivo "$\uparrow$" de SCHEFFER do seguinte modo:

(a) $\sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$
(b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$
(c) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

8. Sabendo que as proposições p e q são verdadeiras e que a proposição r é falsa, determinar o valor lógico (V ou F) das seguintes proposições:

(a) $(\sim p \downarrow q) \wedge (q \uparrow \sim r)$
(b) $((p \uparrow q) \vee (q \downarrow r)) \uparrow (r \downarrow p)$
(c) $(\sim p \uparrow \sim q) \leftrightarrow ((q \downarrow r) \downarrow p)$
(d) $((p \uparrow \sim p) \veebar q) \downarrow (q \wedge \sim r)$

9. Demonstrar que o conectivo "∨" exprime-se em função **unicamente** de "→" pela equivalência: $p \vee q \Leftrightarrow (p \to q) \to p$

10. Demonstrar que a **negação conjunta** e a **negação disjunta** gozam da **propriedade comutativa**, isto é:

$$p \downarrow q \Leftrightarrow q \downarrow p \qquad e \qquad p \uparrow q \Leftrightarrow q \uparrow p$$

11. Demonstrar: $((p \uparrow \sim p) \uparrow (p \uparrow \sim p)) \Leftrightarrow p \wedge p$

12. Demonstrar que as seguintes proposições são **contingentes**:

(a) $(p \downarrow q) \veebar (\sim q \uparrow p)$
(b) $(p \uparrow (q \vee r)) \to$ [illegible]
(c) $((p \downarrow \sim p) \vee q) \downarrow (\sim q \wedge \sim r)$

Capítulo 7

Álgebra das Proposições

1. PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são V (verdade) e F (falsidade).

(a) **Idempotente**: $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Dem. Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \wedge p$ e p, ou seja, a bicondicional $p \wedge p \leftrightarrow p$ é **tautológica**:

p	p ∧ p	p ∧ p ↔ p
V	V	V
F	F	V

Assim, p. ex., temos:

(i) $x \neq 1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$
(ii) $x < 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

(b) **Comutativa**: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Dem. Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$, ou seja, a bicondicional $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ é **tautológica**:

p	q	p ∧ q	q ∧ p	p ∧ q ↔ q ∧ p
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Assim, p. ex., temos:

(i) $x \neq 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$
(ii) $\pi > 3 \wedge \pi < 4 \Leftrightarrow \pi < 4 \wedge \pi > 3$
(iii) $\sqrt{2} > 1 \wedge \sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{5} < 3 \wedge \sqrt{2} > 1$

(c) **Associativa** $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Dem. Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $(p \wedge q) \wedge r$ e $p \wedge (q \wedge r)$:

p	q	r	p∧q	(p ∧ q) ∧ r	q ∧ r	p ∧ (q ∧ r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ é **tautológica**.
Assim, p. ex., temos:

(i) $(a \neq b \wedge b \neq c) \wedge c \neq d \Leftrightarrow a \neq b \wedge (b \neq c \wedge c \neq d)$
(ii) $(x \neq 0 \wedge x > 1) \wedge x < 3 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge (x > 1 \wedge x < 3)$

(d) **Identidade** $p \wedge t \Leftrightarrow p$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$
Dem. Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \wedge t$ e p, $p \wedge c$ e c, ou seja, as bicondicionais $p \wedge t \leftrightarrow p$ e $p \wedge c \leftrightarrow c$ são **tautológicas**:

p	t	c	p ∧ t	p ∧ c	p ∧ t ↔ p	p ∧ c ↔ c
V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V

Estas propriedades exprimem que t e c são respectivamente **elemento neutro** e **elemento absorvente** da conjunção.

Assim, p. ex., temos:

(i) $x \neq 1 \wedge |x| \geq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
(ii) $x \neq 0 \wedge |x| < 0 \Leftrightarrow |x| < 0$

2. PROPRIEDADES DA DISJUNÇÃO

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são V(verdade) e F(falsidade).

(a) **Idempotente** $p \vee p \Leftrightarrow p$
Dem. Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \vee p$ e p, ou seja, a bicondicional $p \vee p \leftrightarrow p$ é **tautológica**:

p	p ∨ p	p ∨ p ↔ p
V	V	V
F	F	V

Assim, p. ex., temos:

(i) $x \neq 0 \vee x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
(ii) $x \leq 1 \vee x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$

(b) **Comutativa** $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Dem. Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \vee q$ e $q \vee p$, ou seja, a bicondicional $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ é **tautológica**:

p	q	p ∨ q	q ∨ p	p ∨ q ↔ q ∨ p
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Assim, p. ex., temos:

(i) $x \neq 1 \vee x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \neq 1$
(ii) $a > b \vee b < c \Leftrightarrow b < c \vee a > b$

(c) **Associativa** $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Dem. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $(p \vee q) \vee r$ e $p \vee (q \vee r)$.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ é **tautológica**.
Assim, p. ex., temos

(i) $(x \neq 1 \vee x \geq 2) \vee x < 4 \Leftrightarrow x \neq 1 \vee (x \geq 2 \vee x < 4)$
(ii) $(a \neq b \vee b \leq c) \vee c < d \Leftrightarrow a \neq b \vee (b \leq c \vee c < d)$

(d) **Identidade** $p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$

Dem. Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee t$ e t, $p \vee c$ e p, ou seja, as bicondicionais $p \vee t \leftrightarrow t$ e $p \vee c \leftrightarrow p$ são tautológicas.

p	t	c	$p \vee t$	$p \vee c$	$p \vee t \leftrightarrow t$	$p \vee c \leftrightarrow p$
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Estas propriedades exprimem que t e c são respectivamente **elemento absorvente** e **elemento neutro** da disjunção.
Assim, p. ex., temos

(i) $x \neq 1 \vee |x| \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 0$
(ii) $x \neq 1 \vee |x| < 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
(iii) $x \neq 0 \vee x^2 < 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

3 PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO E DA DISJUNÇÃO

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer.

(a) **Distributivas**

(i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Dem. (i) Com efeito, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é **tautológica**.
(ii) Analogamente, são idênticas as tabelas-verdade das proposições $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Observe-se que a bicondicional $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é **tautológica**.
A equivalência (i) exprime que a **conjunção é distributiva em relação à disjunção** e a equivalência (ii) exprime que a **disjunção é distributiva em relação à conjunção**.

Assim, p. ex., segundo (i) a proposição

"Carlos estuda e Jorge ouve música ou lê"

é equivalente à seguinte proposição

"Carlos estuda e Jorge ouve música" ou "Carlos estuda e Jorge lê"

Segundo (ii), a proposição

"Chove ou faz vento e frio"

é equivalente à seguinte proposição

"Chove ou faz vento" e "Chove ou faz frio"

(b) Absorção

(i) $p \wedge (p \vee q) \Longleftrightarrow p$
(ii) $p \vee (p \wedge q) \Longleftrightarrow p$

Dem. – (i) Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \wedge (p \vee q)$ e p, ou seja, a bicondicional $p \wedge (p \vee q) \longleftrightarrow p$ é **tautológica**

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \longleftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

(ii) Analogamente, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \vee (p \wedge q)$ e p, ou seja, a bicondicional $p \vee (p \wedge q) \longleftrightarrow p$ é **tautológica**

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \longleftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

(c) **Regras de DE MORGAN** (1806-1871)

(i) $\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$
(ii) $\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Dem. – (i) Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Observe-se que a bicondicional $\sim(p \wedge q) \longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$ é **tautológica.**

(ii) Analogamente, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Observe-se que a bicondicional $\sim(p \vee q) \longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ é **tautológica**

As Regras de DE MORGAN ensinam:

(i) **Negar que duas dadas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que uma pelo menos é falsa.**

(ii) **Negar que uma pelo menos de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.**

Estas Regras de DE MORGAN podem exprimir-se ainda dizendo que a **negação** transforma a **conjunção** em **disjunção** e a **disjunção** em **conjunção**.

Assim, p. ex., segundo (i), a **negação** da proposição

"[illegible] inteligente e estuda"

é a proposição

"Não é inteligente **ou** não estuda"

Segundo (ii), a negação da proposição

"É médico ou professor"

é a proposição

"Não é médico e não é professor"

NOTA As Regras de DE MORGAN mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação

$$p \vee q \Longleftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$$
$$p \wedge q \Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

4. NEGAÇÃO DA CONDICIONAL

Como $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$ (Cap. 6, §3, Ex. 4) temos

$$\sim(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Longleftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim q$$

ou seja

$$\sim(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow p \wedge \sim q$$

Esta equivalência também é demonstrada pelas tabelas-verdade das proposições $\sim(p \rightarrow q)$ e $p \wedge \sim q$, que são **idênticas**

p	q	p → q	~(p → q)	~q	p ∧ ~q
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

NOTA A condicional $p \rightarrow q$ não goza das propriedades **idempotente comutativa e associativa**, pois, as tabelas-verdade das proposições $p \rightarrow p$ e p, $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$, $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ **não são idênticas**

5. NEGAÇÃO DA BICONDICIONAL

Como $p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (Cap. 6, §3, Ex. 5), temos

$$p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

e portanto

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$$
$$\sim(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim\sim q \wedge \sim p)$$

ou seja,

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

Esta equivalência também é demonstrada pelas tabelas-verdade das proposições $\sim(p \leftrightarrow q)$ e $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$, que são **idênticas**

	p	∧	~q)	(p	∧	q)		p	∧	q)
F	V	V	V	V	F	F	[illegible]	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F

As tabelas-verdade das proposições $\sim(p \leftrightarrow q)$, $p \leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \leftrightarrow q$ **são idênticas**.

p	q	p ↔ q	~(p ↔ q)	~q	p ↔ ~q	~p	~p ↔ q
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F

Portanto, subsistem as equivalências

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow p \leftrightarrow \sim q \Longleftrightarrow \sim p \leftrightarrow q$$

NOTA A bicondicional $p \leftrightarrow q$ não goza da propriedade **idempotente**, pois, é imediato que **não são idênticas as tabelas-verdade** das proposições $p \leftrightarrow p$ e p, mas goza das propriedades **comutativa e associativa**

EXERCÍCIOS

1. Demonstrar as propriedades **comutativa** e **associativa** da bicondicional, isto é:

(a) $p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow q \leftrightarrow p$ (b) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Longleftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

2. Demonstrar por tabelas-verdade as equivalências

(a) $p \to q \wedge r \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$ (b) $p \to q \vee r \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$

Dem. (a) Com efeito, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \to q \wedge r$ e $(p \to q) \wedge (p \to r)$

p	→	q	∧	r	(p	→	q)	∧	(p	→	r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F

(b) Analogamente, são **idênticas** as tabelas-verdade das proposições $p \to q \vee r$ e $(p \to q) \vee (p \to r)$

p	→	q	∨	r	(p	→	q)	∨	(p	→	r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F

A equivalência (a) exprime que a **condicional** é **distributiva à esquerda em relação à conjunção** e a equivalência (b) exprime que a **condicional** é **distributiva à esquerda em relação à disjunção**.

A condicional não é distributiva à direita em relação a nenhuma dessas duas operações (conjunção e disjunção).

3. Dar a **negação em linguagem corrente** da proposição "Rosas são vermelhas e violetas são azuis"

Resolução Denotando por **p** a proposição "**Rosas são vermelhas**" e por q a proposição "Violetas são azuis" a proposição dada sob **forma simbólica** escreve-se "$p \wedge q$", cuja **negação** é "$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$". Logo, a **negação** da proposição dada em **linguagem corrente** é

"Rosas [illegible] são vermelhas ou violetas não são azuis"

4. Dar a **negação em linguagem corrente** de cada uma das seguintes proposições

(a) É falso que não está frio ou que está chovendo

(b) Não é verdade que o pai de Marcos é pernambucano ou que a mãe é gaúcha

(c) Não é verdade que as vendas estão diminuindo e que os preços estão aumentando

(d) Não é verdade que Jorge estuda Física, mas não Química

5. Demonstrar as seguintes Regras de DE MORGAN para três componentes

(a) $\sim(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$

(b) $\sim(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

6. Demonstrar por "**Indução matemática**" as seguintes "**Propriedades distributivas generalizadas**"

(a) $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p \wedge q_n)$

(b) $p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p \vee q_n)$

Capítulo 8

Método Dedutivo

1. Todas as implicações e equivalências foram demonstradas até aqui pelo "Método das tabelas-verdade". Vamos agora exemplificar a demonstração de implicações e equivalências por um método mais eficiente, denominado "Método dedutivo".

No emprego do "Método dedutivo" desempenham papel importante as equivalências relativas à Álgebra das Proposições, que observamos subsistem quando as proposições simples p, q, r, ... t (verdadeira) e c (falsa), que nelas figuram são substituídas respectivamente por proposições compostas P, Q, R, ... T (tautologia) e C (contradição).

2. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Demonstrar as implicações

(i) $c \Rightarrow p$ (ii) $p \Rightarrow t$

onde p é uma proposição qualquer e c e t são proposições cujos valores lógicos respectivos são F(falsidade) e V(verdade).

Dem. Temos, sucessivamente

(i) $c \rightarrow p \Leftrightarrow \sim c \vee p \Leftrightarrow t \vee p \Leftrightarrow t$

(ii) $p \rightarrow t \Leftrightarrow \sim p \vee t \Leftrightarrow t$

Observe-se que as tabelas-verdade de $c \rightarrow p$ e $p \rightarrow t$ mostram que estas condicionais são tautológicas

p	c	t	c → p	p → t
V	F	V	V	V
F	F	V	V	V

(2) Demonstrar a implicação $p \wedge q \Rightarrow p$ (Simplificação)

Dem. Temos, sucessivamente

$$p \wedge q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee p \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \Leftrightarrow T \vee \sim q \Leftrightarrow T$$

(3) Demonstrar a implicação $p \Rightarrow p \vee q$ (Adição)

Dem. Temos, sucessivamente

$$p \rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow T$$

(4) Demonstrar a implicação $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (Modus ponens)

Dem. Temos, sucessivamente

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow C \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q \Rightarrow q$$

(5) Demonstrar a implicação $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (Modus tollens)

Dem. Temos, sucessivamente

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee C \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

(6) Demonstrar a implicação $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (Silogismo disjuntivo)

Dem. Temos, sucessivamente

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow C \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow q \wedge \sim p \Rightarrow q$$

(7) Demonstrar a implicação $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

Dem. Temos, sucessivamente

$$p \wedge q \rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) \Leftrightarrow T \vee T \Leftrightarrow T$$

(8) Demonstrar a implicação $p \Rightarrow q \rightarrow p$

Dem. Temos, sucessivamente

$$p \rightarrow (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee p) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \Leftrightarrow T \vee \sim q \Leftrightarrow T$$

(9) Demonstrar a implicação $p \Rightarrow \sim p \rightarrow q$

Dem. Temos, sucessivamente

$$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \Leftrightarrow T$$

(10) Demonstrar a implicação $p \to q \Rightarrow p \wedge r \to q$

Dem. Temos, sucessivamente

$$(p \to q) \to (p \wedge r \to q) \Longleftrightarrow \sim(p \to q) \vee (p \wedge r \to q)$$
$$\Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim(p \wedge r) \vee q)$$
$$\Longleftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \vee q)$$
$$\Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \vee \sim r)$$
$$\Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \sim(p \wedge \sim q) \vee \sim r$$
$$\Longleftrightarrow T \vee \sim r \Longleftrightarrow T$$

(11) Demonstrar a equivalência $p \to q \Longleftrightarrow p \wedge \sim q \to c$ (Redução a absurdo)

Dem. Temos, sucessivamente

$$p \wedge \sim q \to c \Longleftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \vee c \Longleftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim\sim q)$$
$$\Longleftrightarrow \sim p \vee q \Longleftrightarrow p \to q$$

(12) Demonstrar a equivalência $p \to q \Longleftrightarrow p \vee q \to q$

Dem. Temos, sucessivamente

$$p \vee q \to q \Longleftrightarrow \sim(p \vee q) \vee q \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee q \Longleftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$$
$$\Longleftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge T \Longleftrightarrow \sim p \vee q \Longleftrightarrow p \to q$$

(13) Demonstrar a equivalência $(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \Longleftrightarrow \sim p$

Dem. Temos, sucessivamente

$$(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Longleftrightarrow \sim p \vee (q \wedge \sim q)$$
$$\Longleftrightarrow \sim p \vee C \Longleftrightarrow \sim p$$

(14) Demonstrar a equivalência: $p \wedge q \to r \Longleftrightarrow p \to (q \to r)$ (Exportação-Importação)

Dem. Temos, sucessivamente

$$p \to (q \to r) \Longleftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee r) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee r \Longleftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee r$$
$$\Longleftrightarrow p \wedge q \to r$$

(15) Demonstrar a equivalência $(p \to r) \wedge (q \to r) \Longleftrightarrow p \vee q \to r$

Dem. Temos, sucessivamente

$$(p \to r) \wedge (q \to r) \Longleftrightarrow (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee r$$
$$\Longleftrightarrow \sim(p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee q \to r$$

(16) Demonstrar a equivalência $(p \to q) \vee (p \to r) \Longleftrightarrow p \to q \vee r$

Dem. Temos, sucessivamente

$$(p \to q) \vee (p \to r) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r)$$
$$\Longleftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \Longleftrightarrow p \to q \vee r$$

(17) Demonstrar a equivalência $(p \to r) \vee (q \to s) \Longleftrightarrow p \wedge q \to r \vee s$

Dem. Temos, sucessivamente

$$(p \to r) \vee (q \to s) \Longleftrightarrow (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s)$$
$$\Longleftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee (r \vee s) \Longleftrightarrow p \wedge q \to r \vee s$$

(18) Demonstrar as equivalências

(a) $\sim p \Longleftrightarrow p \downarrow p$
(b) $p \wedge q \Longleftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
(c) $p \vee q \Longleftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
(d) $p \to q \Longleftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

Dem. Temos, sucessivamente

(a) $\sim p \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim p \Longleftrightarrow p \downarrow p$
(b) $p \wedge q \Longleftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim\sim q \Longleftrightarrow \sim p \downarrow \sim q \Longleftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
(c) $p \vee q \Longleftrightarrow \sim\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow \sim(p \downarrow q) \Longleftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
(d) $p \to q \Longleftrightarrow \sim p \vee q \Longleftrightarrow \sim\sim(\sim p \vee q) \Longleftrightarrow \sim(\sim p \downarrow q)$
$\Longleftrightarrow (\sim p \downarrow q) \downarrow (\sim p \downarrow q) \Longleftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

(19) Demonstrar as equivalências

(a) $\sim p \Longleftrightarrow p \uparrow p$
(b) $p \wedge q \Longleftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$
(c) $p \vee q \Longleftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$
(d) $p \to q \Longleftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$

Dem. Temos, sucessivamente

(a) $\sim p \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim p \Longleftrightarrow p \uparrow p$
(b) $p \wedge q \Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \Longleftrightarrow \sim(p \uparrow q) \Longleftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$
(c) $p \vee q \Longleftrightarrow \sim\sim p \vee \sim\sim q \Longleftrightarrow \sim p \uparrow \sim q \Longleftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$
(d) $p \to q \Longleftrightarrow \sim p \vee q \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim\sim q \Longleftrightarrow p \uparrow \sim q \Longleftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$

3 REDUÇÃO DO NÚMERO DE CONECTIVOS

Teorema Entre os cinco conectivos fundamentais ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\longleftrightarrow$), três exprimem-se em termos de apenas dois dos seguintes pares

(1) $\sim$ e $\vee$ (2) $\sim$ e $\wedge$ (3) $\sim$ e $\to$

Dem. Com efeito

(1) $\wedge$, $\to$ e $\longleftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\vee$

$p \wedge q \Longleftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim\sim q \Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$
$p \to q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$
$p \longleftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Longleftrightarrow \sim(\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p))$

(2) $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\wedge$:

$$p \vee q \Leftrightarrow \sim\sim p \vee \sim\sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$$
$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$
$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$$

(3) $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\rightarrow$:

$$p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$$
$$p \vee q \Leftrightarrow \sim\sim p \vee q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$$
$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim((p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p))$$

Os conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ não se exprimem em termos de $\sim$ e $\leftrightarrow$.

O conectivo $\vee$ exprime-se em função **unicamente** de $\rightarrow$ pela equivalência $p \vee q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$.

Todos os conectivos exprimem-se em termos de um único $\downarrow$ ou $\uparrow$, conforme mostrou A. M. SCHEFFER em 1913 (§2, Ex. 18 e 19).

4 FORMA NORMAL DAS PROPOSIÇÕES

Definição — Diz-se que uma proposição **está na forma normal** (FN) se e somente se, quando muito, contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.

Exemplificando, estão na **forma normal** (FN) as seguintes proposições:

$$\sim p \wedge \sim q, \quad \sim(\sim p \vee \sim q), \quad (p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$$

Toda a proposição pode ser levada para uma FN equivalente pela eliminação dos conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, se existirem, isto é, pela substituição de $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

Há duas espécies de FN para uma proposição: a **forma normal conjuntiva** (FNC) e a **forma normal disjuntiva** (FND), que a seguir vamos definir e exemplificar.

5 FORMA NORMAL CONJUNTIVA

Definição — Diz-se que uma proposição está na **forma normal conjuntiva** (FNC) se e somente se são verificadas as seguintes condições:

(1) Contém, quando muito, os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$;
(2) $\sim$ não aparece repetido (como $\sim\sim$) e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$ (isto é, só incide sobre letras proposicionais);
(3) $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$ (isto é, não há componentes do tipo $p \vee (q \wedge r)$).

Exemplificando, estão na FNC as seguintes proposições:

$$\sim p \vee \sim q, \quad p \wedge \sim q \wedge r, \quad (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

Para toda proposição pode-se determinar uma FNC equivalente mediante as seguintes transformações:

(1) Eliminando os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ mediante a substituição de $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.
(2) Eliminando negações repetidas e parêntesis precedidos de $\sim$ pelas regras da "Dupla negação" e de "DE MORGAN".
(3) Substituindo $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \wedge q) \vee r$ pelas suas equivalentes respectivas $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ e $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$.

Exemplos:

(1) Determinar a FNC da proposição $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$.
Resolução — Temos sucessivamente:

$$\sim((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge r) \Leftrightarrow (\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow$$
$$((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

Observe-se que uma outra FNC da proposição dada é:

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

equivalente à anterior. Assim sendo, uma mesma proposição pode ter mais de uma FNC, mas equivalentes.

(2) Determinar a FNC da proposição $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.
Resolução — Temos sucessivamente:

$$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim\sim q \vee \sim p) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \sim p) \Leftrightarrow$$
$$(\sim(\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim p \vee q) \vee \sim(q \vee \sim p)) \Leftrightarrow$$
$$((\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim p \vee q) \vee (\sim q \wedge \sim\sim p)) \Leftrightarrow$$
$$((p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim p \vee q) \vee (\sim q \wedge p)) \Leftrightarrow$$
$$(p \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q \vee p)$$

Observe-se que a proposição dada é **tautológica**, pois, cada **elemento** da sua FNC é **tautológico**. Realmente, o 1º elemento contém p e $\sim p$, o 2º elemento contém q e $\sim q$, o 3º elemento contém q e $\sim q$, e, finalmente, o 4º elemento contém p e $\sim p$.

De modo geral, é **tautológica** toda a proposição cujos **elementos** da sua FNC encerram, cada um **deles**, uma proposição e a sua negação, isto é, cujos **elementos** são todos **tautológicos**.

(3) Determinar a FNC da proposição $p \leftrightarrow q \vee \sim r$.
Resolução Temos, sucessivamente:

$$(p \to (q \vee \sim r)) \wedge ((q \vee \sim r) \to p)$$
$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim(q \vee \sim r) \vee p)$$
$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge ((\sim q \wedge r) \vee p)$$
$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (p \vee r)$$

6 FORMA NORMAL DISJUNTIVA

Definição Diz-se que uma proposição está na **forma normal disjuntiva** (FND) se e somente se são verificadas as seguintes condições:

(1) Contém, quando muito, os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$;
(2) $\sim$ não aparece repetido (como $\sim\sim$) e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$ (isto é, só incide sobre letras proposicionais);
(3) $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$ (isto é, não há componentes do tipo $p \wedge (q \vee r)$).

Exemplificando, estão na FND as seguintes proposições:

$$\sim p \vee q, \quad p \vee (\sim q \wedge r), \quad (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$$

Para toda proposição pode-se determinar uma FND equivalente, mediante as seguintes transformações:

(1) Eliminando os conectivos $\to$ e $\leftrightarrow$ mediante a substituição de $p \to q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$;
(2) Eliminando negações repetidas e parêntesis precedidos de $\sim$ pelas regras da "Dupla negação" e de "DE MORGAN";
(3) Substituindo $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \vee q) \wedge r$ pelas suas equivalentes respectivas $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ e $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Exemplos

(1) Determinar a FND da proposição $(p \to q) \wedge (q \to p)$.
Resolução Temos, sucessivamente:

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p) \Leftrightarrow$$
$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (p \wedge q)$$

Observe-se que uma outra FND da proposição dada é $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$, equivalente à anterior. Portanto, uma mesma proposição pode ter mais de uma FND, mas equivalentes.

(2) Determinar a FND da proposição $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$.
Resolução Temos, sucessivamente:

$$\sim((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge r) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge \sim q) \vee (((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge \sim r) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$$

Observe-se que uma outra FND da proposição dada é

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$$

equivalente à anterior.

Importa notar que é **contraválida** toda a proposição cujos **elementos** da sua FND encerram, cada um deles, uma proposição e a sua negação, isto é, cujos **elementos** são todos **contraválidos**.

7 PRINCÍPIO DE DUALIDADE

Seja P uma proposição que só contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$. A proposição que resulta de P trocando cada símbolo $\wedge$ por $\vee$ e cada símbolo $\vee$ por $\wedge$ chama-se a **dual** de P. Assim, p. ex., a **dual** de $\sim((p \wedge q) \vee \sim r)$ é $\sim((p \vee q) \wedge \sim r)$.

Princípio de dualidade. Se P e Q são proposições **equivalentes** que só contêm os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, então as suas **duais** respectivas P_1 e Q_1 também são **equivalentes**.

Assim, p. ex., da equivalência $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ deduz-se, pelo Princípio de dualidade, a equivalência $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

Analogamente, a partir de $(p \wedge \sim p) \vee q \Leftrightarrow q$ deduz-se, pelo Princípio de dualidade $(p \vee \sim p) \wedge q \Leftrightarrow q$.

EXERCÍCIOS

1. Demonstrar as equivalências:

(a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Dem. Temos, sucessivamente:

(a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee c) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (c \wedge q) \Leftrightarrow p \vee c \Leftrightarrow p$
(b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge t) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (t \vee q) \Leftrightarrow p \wedge t \Leftrightarrow p$

2. Simplificar as proposições:

(a) $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$ (b) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

Resolução. Temos, sucessivamente:

(a) $\sim(\sim p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$

(b) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \wedge (\sim q \vee q)$
$\Leftrightarrow \sim p \wedge T \Leftrightarrow \sim p$

3. Simplificar as proposições:

(a) $\sim(p \vee \sim q)$ (b) $\sim(\sim p \wedge q)$
(c) $\sim(\sim p \vee \sim q)$ (d) $(p \vee q) \wedge \sim p$
(e) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)$ (f) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$

4. Demonstrar a equivalência: $p \rightarrow q \Leftrightarrow ((p \uparrow p) \uparrow (p \uparrow p)) \uparrow (q \uparrow q)$

5. Usar o "Método dedutivo" para demonstrar:

(a) $p \wedge \sim p \Rightarrow q$ (b) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$
(c) $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ (d) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$
(e) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r$
(f) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$

6. Demonstrar: $p \uparrow q \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$

7. Determinar uma forma normal conjuntiva (FNC) equivalente para cada uma das seguintes proposições:

(a) $p \rightarrow q$ (b) $p \rightarrow \sim p$
(c) $p \leftrightarrow \sim p$ (d) p [illegible] p
(e) $p \uparrow q$ (f) $p \uparrow p$
(g) $p \uparrow \sim p$ (h) $p \downarrow q$
(i) $(p \wedge \sim p) \downarrow (q \wedge \sim q)$ (j) $(\sim p \wedge q) \underline{\vee} q$
(k) $(p \uparrow q) \rightarrow \sim p$ (l) $\sim p \downarrow (q \downarrow \sim p)$
(m) $p \uparrow (q \vee \sim p)$ (n) $\sim(\sim p \uparrow \sim q) \downarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

8. Determinar uma forma normal disjuntiva (FND) equivalente para cada uma das seguintes proposições:

(a) $\sim(\sim p \vee \sim q)$ (b) $\sim(p \rightarrow q)$
(c) $(p \rightarrow q) \wedge \sim p$ (d) $\sim(p \vee q)$
(e) $(p \rightarrow q) \vee \sim p$ (f) $\sim(p \wedge q)$
(g) $p \underline{\vee} \sim p$ (h) $p \leftrightarrow \sim p$
(i) $p \uparrow q$ (j) $p \downarrow q$
(k) $p \uparrow p$ (l) $p \uparrow \sim p$

Capítulo 9

Argumentos. Regras de Inferência

1. DEFINIÇÃO DE ARGUMENTO

Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n \geq 1$) e Q proposições quaisquer, simples ou compostas.

Definição. Chama-se **argumento** toda a afirmação de que uma dada sequência finita $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n \geq 1$) de proposições tem como **consequência** ou **acarreta** uma proposição final Q.

As proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dizem-se as **premissas** do argumento, e a proposição final Q diz-se a **conclusão** do argumento.

Um argumento de **premissas** $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e de **conclusão** Q indica-se por:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

e se lê de uma das seguintes maneiras:

(i) "$P_1, P_2, \ldots, P_n$ **acarretam** Q"
(ii) "Q **decorre** de $P_1, P_2, \ldots, P_n$"
(iii) "Q **se deduz** de $P_1, P_2, \ldots, P_n$"
(iv) "Q **se infere** de $P_1, P_2, \ldots, P_n$"

Um argumento que consiste em duas premissas e uma conclusão chama-se **silogismo**.

2. VALIDADE DE UM ARGUMENTO

Definição. Um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ diz-se **válido** se e somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que as premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são verdadeiras.

Em outros termos, um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é **válido** se e somente se for V o valor lógico da conclusão Q todas as vezes que as premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tiverem o valor lógico V.

Portanto, todo argumento válido goza da seguinte propriedade característica: **A verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.**

Um argumento **não-válido** diz-se um **sofisma**.

Deste modo, todo argumento tem um valor lógico, digamos V se é **válido** (**correto, legítimo**) ou F se é um sofisma (**incorreto, ilegítimo**).

As premissas dos argumentos são **verdadeiras** ou, pelo menos admitidas como tal. Aliás, a Lógica só se preocupa com a **validade** dos argumentos e não com a **verdade** ou a **falsidade** das premissas e das conclusões.

A validade de um argumento depende **exclusivamente** da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto, afirmar que um dado argumento é **válido** significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas são verdadeiras.

3. CRITÉRIO DE VALIDADE DE UM ARGUMENTO

Teorema Um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é **válido** se e somente se a condicional

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q \qquad (1)$$

é tautológica.

Dem. Com efeito, as premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são todas verdadeiras se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ é verdadeira. Logo, o argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é **válido** se e somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ é verdadeira, ou seja, se e somente se a proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ **implica logicamente** a conclusão Q: $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$ ou, o que é equivalente, se a condicional (1) é **tautológica**.

NOTA Se o argumento

$$P_1(p, q, r, \ldots), \ldots, P_n(p, q, r, \ldots) \vdash Q(p, q, r, \ldots)$$

é válido, então o argumento da "**mesma forma**"

$$P_1(R, S, T, \ldots), \ldots, P_n(R, S, T, \ldots) \vdash Q(R, S, T, \ldots)$$

também é válido, quaisquer que sejam as proposições R, S, T, ...

Exemplificando, do argumento válido $p \vdash p \vee q$ (1) segue-se a validade dos argumentos

$$(\sim p \wedge r) \vdash (\sim p \wedge r) \vee (\sim s \rightarrow r)$$

$$(p \rightarrow r \vee s) \vdash (p \rightarrow r \vee s) \vee (\sim r \wedge s)$$

pois ambos têm a **mesma forma** de (1).

Portanto, a validade ou não-validade de um argumento depende apenas da sua **forma** e não de seu conteúdo ou da verdade e falsidade das proposições que o integram. Argumentos diversos podem ter a mesma forma, e como é a forma que determina a validade, é lícito falar da validade de uma dada forma ao invés de falar da validade de um dado argumento. E afirmar que uma dada forma é válida equivale a asseverar que não existe argumento algum dessa forma com premissas verdadeiras e uma conclusão falsa, isto é, todo argumento de forma válida é um argumento válido. Vice-versa, dizer que um argumento é válido equivale a dizer que tem forma válida.

4. CONDICIONAL ASSOCIADA A UM ARGUMENTO

Consoante o Teorema anterior (§3), dado um argumento qualquer:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

a este argumento **corresponde** a condicional:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

cujo antecedente é a conjunção das premissas e cujo consequente é a conclusão, denominada "**condicional associada**" ao argumento dado.

Reciprocamente, a toda condicional **corresponde** um argumento cujas premissas são as diferentes proposições cuja conjunção formam o antecedente e cuja conclusão é o consequente.

Exemplificando, a "condicional associada" ao argumento

$$p \wedge \sim q, \quad p \rightarrow \sim r, \quad q \vee \sim s \vdash \sim(r \vee s)$$

é

$$(p \wedge \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim r) \wedge (q \vee \sim s) \rightarrow \sim(r \vee s)$$

e o "argumento correspondente" à condicional

$$(p \rightarrow q \vee r) \wedge \sim s \wedge (q \vee r \rightarrow s) \rightarrow (s \rightarrow p \wedge \sim q)$$

é

$$p \rightarrow q \vee r, \quad \sim s, \quad q \vee r \rightarrow s \vdash s \rightarrow p \wedge \sim q$$

5 ARGUMENTOS VÁLIDOS FUNDAMENTAIS

São argumentos válidos fundamentais ou básicos (de uso corrente) os constantes da seguinte lista:

I Adição (AD)

(i) $p \vdash p \vee q$; (ii) $p \vdash q \vee p$

II Simplificação (SIMP)

(i) $p \wedge q \vdash p$; (ii) $p \wedge q \vdash q$

III Conjunção (CONJ)

(i) $p, q \vdash p \wedge q$; (ii) $p, q \vdash q \wedge p$

IV Absorção (ABS)

$p \to q \vdash p \to (p \wedge q)$

V Modus ponens (MP)

$p \to q, \ p \vdash q$

VI Modus tollens (MT)

$p \to q, \ \sim q \vdash \sim p$

VII Silogismo disjuntivo (SD)

(i) $p \vee q, \ \sim p \vdash q$; (ii) $p \vee q, \ \sim q \vdash p$

VIII Silogismo hipotético (SH):

$p \to q, \ q \to r \vdash p \to r$

IX. Dilema construtivo (DC)

$p \to q, \ r \to s, \ p \vee r \vdash q \vee s$

X Dilema destrutivo (DD)

$p \to q, \ r \to s, \ \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$

A validade desses dez argumentos é consequência imediata das tabelas-verdade construídas no Capítulo 5 e do Teorema anterior.

6 REGRAS DE INFERÊNCIA

Os argumentos básicos da lista anterior são usados para fazer "**inferências**", isto é, executar os "passos" de uma **dedução** ou **demonstração** e por isso chamam-se, também, **regras de inferência**, sendo habitual escrevê-los na forma padronizada abaixo indicada — colocando as premissas sôbre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão sob o mesmo traço.

I Regra da Adição (AD)

(i) $\dfrac{p}{p \vee q}$ (ii) $\dfrac{p}{q \vee p}$

II Regra de Simplificação (SIMP)

(i) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ (ii) $\dfrac{p \wedge q}{q}$

III Regra da Conjunção (CONJ)

(i) $\dfrac{p \quad q}{p \wedge q}$ (ii) $\dfrac{p \quad q}{q \wedge p}$

IV Regra da Absorção (ABS)

$\dfrac{p \to q}{p \to (p \wedge q)}$

V. Regra Modus ponens (MP)

$\dfrac{p \to q \quad p}{q}$

VI Regra Modus tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

VII Regra do Silogismo disjuntivo (SD)

(i) $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$ (ii) $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}$$

VIII Regra do Silogismo hipotético (SH)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

IX Regra do Dilema construtivo (DC)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$$

X Regra do Dilema destrutivo (DD)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \sim p \vee \sim r \end{array}$$

Com o auxílio destas dez regras de inferência pode-se demonstrar a validade de um grande número de argumentos mais complexos.

7. EXEMPLOS DO USO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA

Damos a seguir exemplos simples do uso de cada uma das regras de inferência na dedução de conclusões a partir de premissas dadas

I **Regra da Adição** Dada uma proposição p, dela se pode deduzir a sua disjunção com qualquer outra proposição, isto é, deduzir $p \vee q$, ou $p \vee r$, ou $s \vee p$ ou $t \vee p$, etc

Exemplos

(a) (1) p P
(2) $p \vee \sim q$

(b) (1) p P
(2) $q \vee \sim p$

(c) (1) $p \wedge q$ P
(2) $(p \wedge q) \vee r$

(d) (1) $p \vee q$ P
(2) $(r \wedge s) \vee (p \vee q)$

(e) (1) $x \neq 0$ P
$x \neq 0 \vee x \neq 1$

(f) (1) $x < 1$ P
(2) $x = 2 \vee x < 1$

II **Regra da Simplificação** Da conjunção $p \wedge q$ de duas proposições se pode deduzir cada uma das proposições, p ou q.

Exemplos

(a) (1) $(p \vee q) \wedge r$ P
(2) $p \vee q$

(b) (1) $p \wedge \sim q$ P
(2) $\sim q$

(c) (1) $x > 0 \wedge x \neq 1$ P
(2) $x \neq 1$

(d) (1) $x \in A \wedge x \notin B$ P
(2) $x \in A$

III **Regra da Conjunção** Permite deduzir de duas proposições dadas p e q (premissas) a sua conjunção $p \wedge q$ ou $q \wedge p$ (conclusão).

Exemplos

(a) (1) $p \vee q$ P
(2) $\sim r$ P
(3) $(p \vee q) \wedge \sim r$

(b) (1) $p \vee q$ P
(2) $q \vee r$ P
(3) $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$

(c) (1) $x < 5$ P
(2) $x > 1$ P
(3) $x > 1 \wedge x < 5$

(d) (1) $x \in A$ P
(2) $x \notin B$ P
(3) $x \notin B \wedge x \in A$

IV Regra da Absorção Esta regra permite, dada uma condicional como premissa, dela deduzir como conclusão uma outra condicional com o mesmo antecedente p e cujo consequente é a conjunção $p \wedge q$ das duas proposições que integram a premissa, isto é, $p \to p \wedge q$.

Exemplos

(a) (1) $x = 2 \to x < 3$ P
(2) $x = 2 \to x = 2 \wedge x < 3$

(b) (1) $x \in A \to x \in A \cup B$ P
(2) $x \in A \to x \in A \wedge x \in A \cup B$

V Regra Modus ponens Também é chamada **Regra de separação** e permite **deduzir** q (conclusão) a partir de $p \to q$ e p (premissas).

Exemplos

(a) (1) $\sim p \to \sim q$ P
(2) p P
(3) $\sim q$

(b) (1) $p \wedge q \to r$ P
(2) $p \wedge q$ P
(3) r

(c) (1) $p \to q \wedge r$ P
(2) p P
(3) $q \wedge r$

(d) (1) $\sim p \vee r \to s \wedge \sim q$ P
(2) $\sim p \vee r$ P
(3) $s \wedge \sim q$

(e) (1) $x \neq 0 \to x + y > 1$ P
(2) $x \neq 0$ P
(3) $x + y > 1$

(f) (1) $x \in A \cap B \to x \in A$ P
(2) $x \in A \cap B$ P
(3) $x \in A$

VI Regra Modus tollens Permite, a partir das **premissas** $p \to q$ (condicional) e $\sim q$ (negação do consequente), **deduzir** como **conclusão** $\sim p$ (negação do antecedente).

Exemplos

(a) (1) $q \wedge r \to s$ P
(2) $\sim s$ P
(3) $\sim(q \wedge r)$

(b) (1) $p \to \sim q$ P
(2) $\sim\sim q$ P
(3) $\sim p$

(c) (1) $p \to q \vee r$ P
(2) $\sim(q \vee r)$ P
(3) $\sim p$

(d) (1) $x \neq 0 \to x = y$ P
(2) $x \neq y$ P
(3) $x = 0$

VII Regra do Silogismo disjuntivo Permite **deduzir** da **disjunção** $p \vee q$ de duas proposições e da **negação** $\sim p$ (ou $\sim q$) de uma delas a outra proposição q (ou p).

Exemplos

(a) (1) $(p \wedge q) \vee r$ P
(2) $\sim r$ P
(3) $p \wedge q$

(b) (1) $p \vee \sim q$ P
(2) $\sim p$ P
(3) $\sim q$

(c) (1) $x = 0 \vee x = 1$ P
(2) $x \neq 1$ P
(3) $x = 0$

(d) (1) $\sim(p \to q) \vee r$ P
(2) $\sim\sim(p \to q)$ P
(3) r

VIII Regra do Silogismo hipotético Esta regra permite, dadas duas condicionais $p \to q$ e $q \to r$ (premissas), tais que o consequente da primeira coincide com o antecedente da segunda, **deduzir** uma terceira condicional $p \to r$ (conclusão) cujo antecedente e consequente são respectivamente o antecedente da premissa $p \to q$ e o consequente da outra premissa $q \to r$ (**transitividade da seta** $\to$).

Exemplos

(a) (1) $p \to \sim q$ P
(2) $\sim q \to \sim r$ P
(3) $p \to \sim r$

(b) (1) $\sim p \to q \vee r$ P
(2) $q \vee r \to \sim s$ P
(3) $\sim p \to \sim s$

(c) (1) $(p \to q) \to r$ P
(2) $r \to (q \wedge s)$ P
(3) $(p \to q) \to (q \wedge s)$

(d) (1) $|x| = 0 \to x = 0$ P
(2) $x = 0 \to x + 1 = 1$ P
(3) $|x| = 0 \to x + 1 = 1$

IX Regra do Dilema construtivo Nesta regra, as **premissas** são duas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes, e a **conclusão** é a disjunção dos consequentes destas condicionais.

Exemplos

(a) (1) $(p \wedge q) \to \sim r$ P
(2) $s \to t$ P
(3) $(p \wedge q) \vee s$ P
(4) $\sim r \vee t$

(b) (1) $x < y \to x = 2$ P
(2) $x \nless y \to x > 2$ P
(3) $x < y \vee x \nless y$ P
(4) $x = 2 \vee x > 2$

X. **Regra do Dilema destrutivo** — Nesta regra, as **premissas** são duas condicionais e a disjunção da **negação** dos seus consequentes, e a **conclusão** é a disjunção da **negação** dos antecedentes destas condicionais.

Exemplos

(a) (1) $\sim q \to r$ P
(2) $p \to \sim s$ P
(3) $\sim r \vee \sim\sim s$ P
(4) $\sim\sim q \vee \sim p$

(b) (1) $x + y = 7 \to x = 2$ P
(2) $y - x = 2 \to x = 3$ P
(3) $x \neq 2 \vee x \neq 3$ P
(4) $x + y \neq 7 \vee y - x \neq 2$

EXERCÍCIOS

1. Construir a **"condicional associada"** a cada um dos seguintes argumentos

(a) $\sim p,\ \sim q \to p \vdash q$
(b) $p \to q \vdash \sim(p \wedge \sim q)$
(c) $p,\ p \to q,\ \sim q \vee (r \wedge s) \vdash r \wedge s$
(d) $x = y \to x < 5,\ x < 5 \to x < z \vdash x = y \to x < z$

2. Construir o **argumento** (premissas e conclusão) **correspondente** a cada uma das seguintes condicionais

(a) $p \wedge (q \vee \sim p) \to q$
(b) $(p \to q) \wedge (p \wedge \sim q) \to s$
(c) $(x = 0 \wedge y \neq x) \to x \nless 0 \vee y \neq x$

3. Indicar a **Regra de inferência** que justifica a **validade** dos seguintes argumentos

(a) $p \to q \vdash (p \to q) \vee \sim r$
(b) $p \wedge (q \to r) \vdash \sim p$
(c) $p \to q,\ q \to \sim r \vdash p \to \sim r$
(d) $p \to (q \to r),\ p \vdash q \to r$
(e) $(q \vee r) \to \sim p,\ \sim\sim p \vdash \sim(q \vee r)$
(f) $p \to q,\ r \to \sim s \vdash (p \to q) \wedge (r \to \sim s)$
(g) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r),\ \sim(\sim p \wedge r) \vdash p \wedge q$
(h) $p \to q \vee r \vdash p \to p \wedge (q \vee r)$
(i) $x + y = z \to y + x = z,\ x + y = z \vdash y + x = z$
(j) $x, y \in R \to x + y \in R,\ x + y \notin R \vdash x, y \notin R$
(k) $x \neq 0,\ x \neq 1 \vdash x \neq 0 \wedge x \neq 1$

(l) $3 < 5 \vdash 3 < 5 \vee 3 < 2$
(m) $x < 0 \vee x = 1,\ x \neq 1 \vdash x < 0$
(n) $x = 1 \to x < 3,\ x < 3 \to x + y < 5 \vdash x = 1 \to x + y < 5$
(o) $\pi > 3 \wedge \pi < 4 \vdash \pi < 4$

4. Usar a regra "Modus ponens" para deduzir a **conclusão** de cada um dos seguintes pares de premissas

(a) (1) $x = y \wedge y = z$
(2) $(x = y \wedge y = z) \to x = z$

(b) (1) $x, y \in R \to xy \in R$
(2) $x, y \in R$

(c) (1) $(x > y \wedge y > z) \to x > z$
(2) $x > y \wedge y > z$

(d) (1) $2 > 1 \to 3 > 1$
(2) $2 > 1$

(e) (1) $x + 1 = 2$
(2) $x + 1 = 2 \to y + 1 = 2$

(f) (1) $x + 0 = y \to x = y$
(2) $x + 0 = y$

5. Usar a regra "Modus tollens" para deduzir a **conclusão** de cada um dos seguintes pares de premissas

(a) (1) $x \neq 0 \to x + y \neq y$
(2) $x + y = y$

(b) (1) $x = z \to x = 6$
(2) $x \neq 6$

(c) (1) $(p \leftrightarrow q) \to \sim(r \wedge s)$
(2) $\sim\sim(r \wedge s)$

(d) (1) $x > 3 \to x > y$
(2) $x \ngtr y$

6. Usar a regra do "Silogismo disjuntivo" para deduzir a **conclusão** de cada um dos seguintes pares de premissas

(a) (1) $x + 8 = 12 \vee x \neq 4$
(2) $x + 8 \neq 12$

(b) (1) $y < 6 \vee x + y < 10$
(2) $x + y \nless 10$

(c) (1) $s \vee (r \wedge t)$
(2) $\sim s$

(d) (1) $\sim p \vee \sim q$
(2) $\sim\sim q$

7. Usar a regra do "Silogismo hipotético" para deduzir a **conclusão** de cada um dos seguintes pares de premissas

(a) (1) $p \to r \vee \sim s$
(2) $r \vee \sim s \to t$

(b) (1) $x = 3 \to x < y$
(2) $x < y \to x \neq z$

(c) (1) $s \vee t \to r \wedge q$
(2) $r \wedge q \to \sim p$

(d) (1) $xy = 6 \to xy + 5 = 11$
(2) $xy + 5 = 11 \to y = 2$

8 Usar a regra do "Dilema construtivo" para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes ternos de premissas

(a) (1) $p \to r$
(2) $\sim q \to \sim s$
(3) $p \vee \sim q$

(b) (1) $x = 5 \vee x < y$
(2) $x = 5 \to x > 3$
(3) $x < y \to z < 2$

(c) (1) $y = 0 \to xy = 0$
(2) $y > 1 \to xy > 3$
(3) $y = 0 \vee y > 1$

(d) (1) $x = 2 \to x^2 = 4$
(2) $x = 2 \vee y = 3$
(3) $y = 3 \to y^2 = 9$

9 Usar a regra do "Dilema destrutivo" para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes ternos de premissas.

(a) (1) $p \wedge q \to r$
(2) $q \to r \wedge s$
(3) $\sim r \vee \sim(r \wedge s)$

(b) (1) $p \to \sim r \wedge q$
(2) $\sim(\sim r \wedge q) \vee \sim s$
(3) $\sim q \to s$

(c) (1) $x < 3 \to x \neq y$
(2) $x > 4 \to x < y$
(3) $x = y \vee x \not< y$

(d) (1) $y \neq 9 \vee y \neq 18$
(2) $x = 2 \to y = 9$
(3) $x = 8 \to y = 18$

Capítulo 10

Validade Mediante Tabelas-Verdade

1 As tabelas-verdade podem ser usadas para **demonstrar**, **verificar** ou **testar** a **validade** de qualquer argumento.

Dado um argumento

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q \quad (1)$$

cumpre constatar se é ou não possível ter $V(Q) = F$ quando $V(P_1) = V(P_2) = \ldots = V(P_n) = V$. Para isso, o procedimento prático consiste em construir uma tabela-verdade com uma coluna para cada premissa e a conclusão, e nela identificar as linhas em que os valores lógicos das **premissas** $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são todos V. Nessas linhas, o valor lógico da **conclusão** Q deve ser também V para que o argumento dado (1) seja **válido**. Se, ao invés, em ao menos uma dessas linhas o valor lógico da **conclusão** Q for F, então o argumento dado (1) é **não-válido**, ou seja, é um **sofisma**.

Uma outra alternativa para **demonstrar**, **verificar** ou **testar** a validade do argumento dado (1) consiste em construir a "condicional associada"

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$$

e reconhecer se esta condicional é ou não uma **tautologia** mediante a construção da sua respectiva tabela-verdade. Se esta condicional é **tautológica**, então o argumento dado (1) é **válido**. Caso contrário, o argumento dado (1) é um **sofisma**.

2 **EXEMPLIFICAÇÃO**

(1) **Verificar se é válido o argumento**: $p \to q,\ q \vdash p$

Resolução Construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	p → q	
V	V	V	←
V	F	F	
F	V	V	← 3
F	F	V	

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 2 e 3, e a conclusão figura na coluna 1. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 1 e 3. Na linha 1 a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 3 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado não é válido, ou seja, é um sofisma, pois a falsidade da conclusão é compatível com a verdade das premissas.

Observe-se que esta forma de argumento não-válido apresenta certa semelhança com a forma de argumento válido **Modus ponens**. Tem o nome de "Sofisma de afirmar o consequente".

(2) Verificar se é **válido** o argumento: $p \to q, \ \sim p \vdash \ \sim q$

Resolução — Construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	p → q	~p	~q	
V	V	V	F	F	
V	F	F	F	V	
F	V	V	V	F	← 3
F	F	V	V	V	← 4

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 3 e 4, e a conclusão figura na coluna 5. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 3 e 4. Na linha 4 a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 3 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado **não é válido**, ou seja, é um **sofisma**.

Observe-se que esta forma de argumento não-válido apresenta certa semelhança com a forma de argumento válido **Modus tollens**. Tem o nome de "Sofisma de negar o antecedente".

(3) Verificar a **validade** do argumento: $p \leftrightarrow q, \ q \vdash p$

Resolução — Construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	p ↔ q	
V	V	V	← 1
V	F	F	
F	V	F	
F	F	V	

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 2 e 3, e a conclusão figura na coluna 1. As premissas são ambas verdadeiras (V) somente na linha 1, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V), isto é, não é possível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa. Logo, o argumento dado é **válido**.

(4) Testar a **validade** do argumento: $p \vee q, \ \sim q, \ p \to r \vdash r$

Resolução — Construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	r	p ∨ q	~q	p → r	
V	V	V	V	F	V	
V	V	F	V	F	F	
V	F	V	V	V	V	← 3
V	F	F	V	V	F	
F	V	V	V	F	V	
F	V	F	V	F	V	
F	F	V	F	V	V	
F	F	F	F	V	V	

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 4, 5 e 6, e a conclusão figura na coluna 3. As três premissas são verdadeiras (V) somente na linha 3, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V), isto é, não é possível ter premissas verdadeiras e conclusão falsa. Logo, o argumento dado é **válido**.

(5) Testar a **validade** do argumento:

Se $x = 0$ e $y = z$, então $y > 1$
$y \not> 1$
Portanto, $y \neq z$

Resolução — Representando as três proposições simples $x = 0$, $y = z$ e $y > 1$ respectivamente por p, q e r, o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \wedge q \to r, \ \sim r \vdash \ \sim q$$

Posto isto, construamos a seguinte tabela-verdade:

p	q	r	p ∧ q	p ∧ q → r	~r	~q	
V	V	V	V	V	F	F	
V	V	F	V	F	V	F	
V	F	V	F	V	F	V	
V	F	F	F	V	V	V	← 4
F	V	V	F	V	F	F	
F	V	F	F	V	V	F	← 6
F	F	V	F	V	F	V	
F	F	F	F	V	V	V	← 8

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 5 e 6, e a conclusão figura na coluna 7. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 4, 6 e 8. Nas linhas 4 e 8 a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 6 a conclusão é falsa (F), isto é, a falsidade da conclusão é compatível com a verdade das premissas. Logo, o argumento dado **não é válido**, ou seja, é um **sofisma**.

NOTA. Para demonstrar que um argumento é **não-válido** basta encontrar um argumento da mesma **forma** e que tenha, no entanto, premissas verdadeiras e conclusão falsa. Esta maneira de demonstrar a **não-validade** de um argumento chama-se "Método do contra-exemplo".

Exemplificando, o seguinte argumento tem a mesma **forma** do que foi dado:

Se $1 = 0$ e $0 = 0$, então $0 > 1$
$0 \not> 1$
Portanto, $0 \neq 0$

A primeira premissa é verdadeira (V), porque o seu antecedente é falso, e a segunda premissa é obviamente verdadeira (V), mas a conclusão é claramente falsa (F). Logo, este argumento é um **contra-exemplo** que prova que o argumento dado é **não-válido (sofisma)**.

(6) Verificar se é **válido** o argumento: $p \rightarrow q, \sim p \vdash \sim q$
Resolução – A "condicional associada" ao argumento dado é:

$$((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$$

Construamos a tabela-verdade desta condicional:

p	q	~p	p → q	(p → q) ∧ ~p	~q	((p → q) ∧ ~p) → ~q	
V	V	F	V	V	F	F	←
V	F	F	V	V	V	V	
F	V	V	V	F	F	V	
F	F	V	F	F	V	V	

Na última coluna desta tabela-verdade figuram as letras V e F. Logo, a "condicional associada" **não é tautológica** e por conseguinte o argumento dado **não é válido**, ou seja, é um **sofisma**.

Chega-se à mesma conclusão observando que as premissas do argumento dado são ambas verdadeiras (V) na linha [illegible] e que nesta linha a conclusão é falsa (F).

(7) Verificar se é **válido** o argumento: $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q \vee r$
Resolução – A "condicional associada" ao argumento dado é:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$$

Construamos a tabela-verdade desta condicional:

p	q	r	p → q	q ∨ r	p → q ∨ r	(p → q) → (p → q ∨ r)	
V	V	V	V	V	V	V	← 1
V	V	F	V	V	V	V	← 2
V	F	V	F	V	V	V	
V	F	F	F	F	F	V	
F	V	V	V	V	V	V	← 5
F	V	F	V	V	V	V	← 6
F	F	V	V	V	V	V	← 7
F	F	F	V	F	V	V	← 8

Na última coluna desta tabela-verdade figura somente a letra V (verdade). Logo, a "condicional associada" é **tautológica** e por conseguinte o argumento dado é **válido**.

Chega-se à mesma conclusão observando que a premissa do argumento dado é verdadeira (V) nas linhas 1, 2, 5, 6, 7 e 8, e em cada uma destas linhas a conclusão é verdadeira (V).

(8) Testar a **validade** do argumento:

Se $x = 0$, então $x + y = y$
Se $y = z$, então $x + y \neq y$
Logo, se $x = 0$, então $y \neq z$

Resolução – Representando as três proposições simples $x = 0$, $x + y = y$ e $y = z$ respectivamente por p, q e r, o argumento dado sob forma simbólica escreve-se:

$$p \rightarrow q, \; r \rightarrow \sim q \vdash p \rightarrow \sim r$$

Então, a "condicional associada" ao argumento dado é:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$$

Posto isto, construamos a tabela-verdade desta condicional a fim de reconhecer se é ou não uma **tautologia**

(p	→	q)	∧	(r	→	~q)	→	(p	→	~r)	
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F	
V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	← 2
V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	
F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F	
F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	← 6
F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	F	← 7
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	← 8
1	2	1	4	1	3	2	5	1	3	2	

Na coluna 5 desta tabela-verdade figura somente a letra **V** (verdade). Logo, a condicional associada" é **tautológica** e, por conseguinte, o argumento dado é **válido**.

Chega-se ao mesmo resultado observando que as premissas do argumento dado são ambas verdadeiras (V) nas linhas 2, 6, 7 e 8, e em cada uma destas linhas a conclusão também é verdadeira (V).

(9) Testar a **validade** do argumento

Se 8 não é par, então 5 não é primo
Mas 8 é par
Logo, 5 é primo

Resolução Cumpre, em primeiro lugar, passar o argumento dado para a **forma simbólica**. Representando por p a proposição "8 é par" e por q a proposição "5 é primo", temos

$$\sim p \rightarrow \sim q, \quad p \vdash q$$

Posto isto, construamos a seguinte tabela-verdade

p	q	~p	~q	~p → ~q	
V	V	F	F	V	← 1
V	F	F	V	V	← 2
F	V	V	F	F	
F	F	V	V	V	

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 1 e 5, e a conclusão figura na coluna 2. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 1 e 2, mas na linha 2 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado é um **sofisma** embora tenha premissas e conclusão verdadeiras.

(10) Verificar a **validade** do argumento

Se 7 é menor que 4, então 7 não é primo
7 não é menor que 4
Logo, 7 é primo

Resolução Seja **p** a proposição "7 é menor que 4" e **q** a proposição "7 é primo". Isto posto, sob **forma simbólica** o argumento dado escreve-se

$$p \rightarrow \sim q, \quad \sim p \vdash q$$

Posto isto, construamos a seguinte tabela-verdade

p	q	~q	p → ~q	~p	
V	V	F	F	F	
V	F	V	V	F	
F	V	F	V	V	← 3
F	F	V	V	V	← 4

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 4 e 5, e a conclusão figura na coluna 2. As premissas são ambas verdadeiras (V) nas linhas 3 e 4, mas na linha 4 a conclusão é falsa (F). Logo, o argumento dado é um **sofisma**, embora tenha premissas e conclusão verdadeiras.

(11) Verificar se é **válido** o argumento

Se 7 é primo, então 7 não divide 21
7 divide 21
Logo, 7 não é primo

Resolução Representando por **p** a proposição "7 é primo" e por q a proposição "7 divide 21", o argumento dado sob **forma simbólica** escreve-se

$$p \rightarrow \sim q, \quad q \vdash \sim p$$

Posto isto, construamos a seguinte tabela-verdade

p	q	~p	~q	p → ~q
V	V	F	F	I
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V ← 3
F	F	V	V	V

As premissas do argumento dado figuram nas colunas 2 e 5, e a conclusão figura na coluna 3. As premissas são ambas verdadeiras (V) somente na linha 3, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V). Logo, o argumento dado é **válido**.

Observe-se que a primeira premissa e a conclusão deste argumento **válido** são proposições falsas.

(12) Verificar a **validade** do argumento

Se chove, Marcos fica resfriado
Marcos não ficou resfriado
______
Logo, não choveu

Resolução Representando por p a proposição "Chove" e por q a proposição "Marcos fica resfriado", o argumento dado sob **forma simbólica** escreve-se:

$$p \to q,\ \sim q \vdash \sim p$$

e por conseguinte é **válido**, pois, tem a **forma** do argumento válido **Modus tollens** (MT).

(13) Verificar se é **válido** o argumento:

Se um homem é careca, ele é infeliz
Se um homem é infeliz, ele morre jovem
______
Logo, carecas morrem jovens

Resolução Representando as proposições "Ele é careca", "Ele é infeliz" e "Ele morre jovem" respectivamente por p, q e r, o argumento dado sob **forma simbólica** escreve-se

$$p \to q,\ q \to r \vdash p \to r$$

e por conseguinte é **válido**, pois, tem a **forma** do argumento válido **Silogismo hipotético** (SH).

(14) Testar a **validade** do argumento:

Se 8 é par, então 3 não divide 7
Ou 5 não é primo ou 3 divide 7
Mas 5 é primo
Portanto, 8 é ímpar

Resolução Representando as **proposições simples** "8 é par", "3 divide 7" e "5 é primo" respectivamente por p, q e r, o argumento dado sob **forma simbólica** escreve-se

$$p \to \sim q,\ \sim r \vee q,\ r \vdash \sim p$$

Então, a "condicional associada" ao argumento dado é

$$((p \to \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r) \to \sim p$$

Posto isto, construamos a tabela-verdade abreviada desta condicional a fim de reconhecer se é ou não uma **tautologia**

((p	→	~q)	∧	(~r	∨	q)	∧	r)	→	~p	
V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F	
V	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	
V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	
V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	← 5
F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	
F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	
I	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V	
1	3	2	4	2	3	1	5	1	6	2	

Na coluna 6 desta tabela-verdade figura somente a letra V (verdade). Logo, a "condicional associada" é **tautológica** e por conseguinte o argumento dado é **válido**.

Chega-se ao mesmo resultado observando que as três premissas do argumento dado são ao mesmo tempo verdadeiras (V) somente na linha 5, e nesta linha a conclusão também é verdadeira (V).

Note-se que a segunda premissa e a conclusão deste argumento **válido** são proposições falsas.

3. PROVA DE NÃO-VALIDADE

O método usual para **demonstrar, verificar** ou **testar** a **não-validade** de um dado argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ consiste em encontrar uma **atribuição de valores lógicos** às proposições simples componentes do argumento que torne todas as **premissas** $P_1, P_2, \ldots, P_n$ **verdadeiras** (V) e a **conclusão** Q **falsa** (F), o que equivale em encontrar uma **linha** da tabela-verdade relativa ao argumento dado em que os valores lógicos das **premissas** $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são todos V e o valor lógico da **conclusão** Q é F. É óbvio que todas as vezes que seja possível encontrar essa **atribuição de valores lógicos** sem a construção da tabela-verdade completa relativa ao argumento dado evita-se uma boa parte do trabalho.

Exemplos:

(1) Demonstrar a **não-validade** do argumento

$$(p \to q) \vee \sim(r \wedge s),\ p \vee s \vdash r \to q$$

Dem. Com a seguinte atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes do argumento dado:

V	F
r	p
s	q

os valores lógicos das **duas** premissas são V e o valor lógico da conclusão é F, pois, temos:

1ª Premissa: $(F \to F) \vee \sim(V \wedge V) = V \vee \sim V = V \vee F = V$
2ª Premissa: $F \vee V = V$
Conclusão: $V \to F = F$

Logo, o argumento dado é **não-válido** (sofisma).

(2) Demonstrar a **não-validade** do argumento

$$p \vee \sim q,\ \sim(\sim r \wedge s),\ \sim(\sim p \wedge \sim s) \vdash \sim q \to r$$

Dem. Com a seguinte atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes do argumento dado:

V	F
p	q
	r
	s

os valores lógicos das **três** premissas são V e o valor lógico da conclusão é F, pois, temos:

1ª Premissa: $V \vee \sim F = V \vee V = V$
2ª Premissa: $\sim(\sim F \wedge F) = \sim(V \wedge F) = \sim F = V$
3ª Premissa: $\sim(\sim V \wedge \sim F) = \sim(F \wedge V) = \sim F = V$
Conclusão: $\sim F \to F = V \to F = F$

Logo, o argumento dado **não é válido** (sofisma).

(3) Demonstrar que é **não-válido** o argumento

$$p \wedge q \to (p \to r) \vee s,\ p \wedge \sim r \vdash \sim p \vee \sim q$$

Dem. Atribuindo às proposições simples componentes do argumento dado os valores lógicos indicados pela tabela:

V	F
p	r
q	
s	

resulta o valor lógico V para as **duas** premissas e o valor lógico F para a conclusão, pois, temos:

1ª Premissa: $V \wedge V \to (V \to F) \vee V = V \to F \vee V = V \to V = V$
2ª Premissa: $V \wedge \sim F = V \wedge V = V$
Conclusão: $\sim V \vee \sim V = F \vee F = F$

Portanto, o argumento dado **não é válido** (sofisma).

(4) Demonstrar que é **não-válido** o argumento

(1) $x \neq 0$
(2) $x = 0 \vee (x < y \vee y \ngtr x)$
(3) $y > x \to y > 1 \wedge x + y > 2$

$y > 1 \to x < 1$

Dem. Atribuindo às proposições simples componentes do argumento dado os valores lógicos indicados pela tabela:

V	F
$y > x$	$x = 0$
$y > 1$	$x < 1$
$x + y > 2$	

resulta o valor lógico V para as três premissas e o valor lógico F para a conclusão, pois, temos

1ª Premissa $\sim F = V$
2ª Premissa $F \vee \sim(F \vee \sim V) = F \vee \sim(F \vee F) = F \vee \sim F = F \vee V = V$
3ª Premissa $V \rightarrow V \wedge V = V \rightarrow V = V$
Conclusão $V \rightarrow F = F$

(5) Demonstrar a **não-validade** do argumento

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \vee x = 2$
(2) $x = 1 \vee x = 2 \rightarrow 3x > x^2$
(3) $3x \not> x^2$

$3x > x^2 \vee x = 1$

Dem. — Atribuindo a todas as proposições simples componentes do argumento dado o mesmo valor lógico F resulta o valor lógico V para as três premissas e o valor lógico F para a conclusão, pois, temos

1ª Premissa $F \rightarrow F \vee F = F \rightarrow F = V$
2ª Premissa $F \vee F \rightarrow F = F \rightarrow F = V$
3ª Premissa $\sim F = V$
Conclusão $F \vee F = F$

EXERCÍCIOS

1. Usar tabelas-verdade para verificar que são **válidos** os seguintes argumentos

(a) $p \rightarrow q, \ r \rightarrow \sim q \vdash r \rightarrow \sim p$
(b) $p \rightarrow \sim q, \ r \rightarrow p, \ q \vdash \sim r$
(c) $p \rightarrow q, \ r \vee \sim q, \ \sim r \vdash \sim p$
(d) $p \rightarrow q \vee r, \ \sim q \vdash p \rightarrow r$
(e) $p \rightarrow \sim q, \ p, \ \sim q \rightarrow r \vdash r$
(f) $p \wedge \sim q, \ \sim r \rightarrow q \vdash p \wedge r$
(g) $p \vee (q \vee r), \ \sim p, \ \sim r \vdash q$
(h) $p \vee \sim q, \ \sim p, \ \sim(p \wedge r) \rightarrow q \vdash r$

2. Verificar mediante tabelas-verdade que são **válidos** os seguintes argumentos

(a) $p \rightarrow \sim q, \ q, \ \sim p \rightarrow r \wedge s \vdash r \wedge s$
(b) $p \rightarrow q \wedge r, \ \sim(q \wedge r), \ \sim p \rightarrow s \vdash \sim p \wedge s$
(c) $p \vee q, \ q \rightarrow r, \ \sim r \vee s \vdash s$
(d) $p \wedge q \rightarrow r, \ s \rightarrow p \wedge q, \ s \vdash q \vee r$
(e) $p \vee q, \ q \rightarrow r, \ p \rightarrow s, \ \sim s \vdash r \wedge (p \vee q)$

3. Usar tabelas-verdade para mostrar a **validade** dos seguintes argumentos

(a) (1) $x = 0 \rightarrow x \neq y$
(2) $x = z \rightarrow x = y$
(3) $x = z$

$x \neq 0$

(b) (1) $x = 6 \rightarrow x > y$
(2) $\sim(y > 5 \wedge x \neq 6)$
(3) $y \not> 5 \rightarrow x > y$

$x > y$

(c) (1) $x \neq y \rightarrow x \neq z$
(2) $x \neq z \rightarrow x \neq 0$
(3) $x = 0$

$x = y$

(d) (1) $y > x \leftrightarrow x = 0$
(2) $xy = 0 \leftrightarrow x = 0$
(3) $y \not> x$

$xy \neq 0$

4. Demonstrar a **não-validade** dos seguintes argumentos pelo "Método de atribuição de valores lógicos"

(a) $p \rightarrow q, \ r \rightarrow s, \ p \vee s \vdash q \vee r$
(b) $\sim(p \wedge q), \ \sim p \wedge \sim q \rightarrow r \wedge s, \ s \rightarrow r \vdash r$
(c) $p \leftrightarrow q \vee r, \ q \leftrightarrow p \vee r, \ r \leftrightarrow p \vee q, \ \sim p \vdash q \vee r$
(d) $p \rightarrow q \vee r, \ s \leftrightarrow r, \ p \vee q \vdash p \wedge q$
(e) $(p \rightarrow q) \rightarrow r, \ r \rightarrow \sim s \vee t, \ (s \rightarrow t) \rightarrow u, \ u \vdash p \rightarrow q$
(f) $p \rightarrow (q \rightarrow r), \ s \rightarrow (t \rightarrow v), \ q \rightarrow s \wedge t, \ \sim(q \wedge v) \vdash p \leftrightarrow r$

5. Passar para a **forma simbólica** e testar a **validade** do argumento

Se trabalho, não posso estudar
Trabalho ou passo em Física
Trabalho

Logo, passei em Física

Capítulo 11

Validade Mediante Regras de Inferência

1. O **método das tabelas-verdade** permite **demonstrar, verificar** ou **testar a validade** de qualquer argumento, mas o seu emprego torna-se cada vez mais trabalhoso à medida que aumenta o número de proposições simples componentes dos argumentos. Assim, p. ex., para testar a **validade** de um argumento com **cinco** (5) proposições simples componentes é necessário construir uma tabela-verdade com $2^5 = 32$ linhas, perspectiva nada animadora.

Um método mais eficiente para **demonstrar, verificar** ou **testar a validade** de um dado argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ consiste em **deduzir** a conclusão Q a partir das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mediante o uso de certas regras de inferência.

2. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Verificar que é **válido** o argumento $p \to q, \; p \wedge r \vdash q$

Resolução Temos sucessivamente

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$p \wedge r$	P	
(3)	p	2	SIMP
(4)	q	1,3	MP

Da segunda premissa $p \wedge r$ pela **Regra de Simplificação** (SIMP), inferimos p. De p e da primeira premissa $p \to q$ pela **Regra Modus ponens** (MP), inferimos q, que é a **conclusão** do argumento dado.

Assim, a **conclusão** pode ser **deduzida** das **duas** premissas do argumento dado por meio de **duas Regras de inferência**, e por conseguinte o argumento dado **é válido**.

(2) Verificar que é **válido** o argumento

$$p \wedge q, \; p \vee r \to s \vdash p \wedge s$$

Resolução Temos sucessivamente

(1)	$p \wedge q$	P	
(2)	$p \vee r \to s$	P	
(3)	p	1	SIMP
(4)	$p \vee r$	3	AD
(5)	s	2,4	MP
(6)	$p \wedge s$	3,5	CONJ

Da primeira premissa $p \wedge q$, pela **Regra de Simplificação (SIMP)**, inferimos **p**. De p, pela **Regra da Adição** (AD), inferimos $p \vee r$. De $p \vee r$ e da segunda premissa $p \vee r \to s$, pela **Regra Modus ponens** (MP), inferimos s. De s e de **p** (linha 3), pela **Regra da Conjunção** (CONJ), inferimos $p \wedge s$, que é a **conclusão** do argumento dado.

Assim, a **conclusão** pode ser **deduzida** das duas premissas do argumento dado por meio de quatro **Regras de inferência**, e por conseguinte o argumento dado **é válido**.

(3) Verificar a **validade** do argumento

$$p \to (q \to r), \; p \to q, \; p \vdash r$$

Resolução Temos sucessivamente

(1)	$p \to (q \to r)$	P	
(2)	$p \to q$	P	
(3)	p	P	
(4)	$q \to r$	1,3	MP
(5)	q	2,3	MP
(6)	r	4,5	MP

(4) Verificar a **validade** do argumento

$$p \to q, \; p \wedge q \to r, \; \sim(p \wedge r) \vdash \sim p$$

Resolução Temos sucessivamente

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$p \wedge q \to r$	P	
(3)	$\sim(p \wedge r)$	P	
(4)	$p \to p \wedge q$	1	ABS
(5)	$p \to r$	2,4	SH
(6)	$p \to p \wedge r$	5	ABS
(7)	$\sim p$	3,6	MT

(5) Verificar que é válido o argumento

$$p \vee q \to r, \quad r \vee q \to (p \to (s \leftrightarrow t)), \quad p \wedge s \vdash s \leftrightarrow t$$

Resolução Temos sucessivamente

(1)	$p \vee q \to r$	P	
(2)	$r \vee q \to (p \to (s \leftrightarrow t))$	P	
(3)	$p \wedge s$	P	
(4)	p	3	SIMP
(5)	$p \vee q$	4	AD
(6)	r	1,5	MP
(7)	$r \vee q$	6	AD
(8)	$p \to (s \leftrightarrow t)$	2,7	MP
(9)	$s \leftrightarrow t$	4,8	MP

(6) Verificar que é válido o argumento

$$p \to \sim q, \quad \sim p \to (r \to \sim q), \quad (\sim s \vee \sim r) \to \sim\sim q, \quad \sim s \vdash \sim r$$

Resolução Temos, sucessivamente

(1)	$p \to \sim q$	P	
(2)	$\sim p \to (r \to \sim q)$	P	
(3)	$(\sim s \vee \sim r) \to \sim\sim q$	P	
(4)	$\sim s$	P	
(5)	$\sim s \vee \sim r$	4	AD
(6)	$\sim\sim q$	3,5	MP
(7)	$\sim p$	1,6	MT
(8)	$r \to \sim q$	2,7	MP
(9)	$\sim r$	6,8	MT

(7) Verificar a validade do argumento

$$p \wedge q \to r, \quad r \to s, \quad t \to \sim u, \quad t, \quad \sim s \vee u \vdash \sim(p \wedge q)$$

Resolução Temos, sucessivamente

(1)	$p \wedge q \to r$	P	
(2)	$r \to s$	P	
(3)	$t \to \sim u$	P	
(4)	t	P	
(5)	$\sim s \vee u$	P	
(6)	$\sim u$	3,4	MP
(7)	$\sim s$	5,6	SD
(8)	$\sim r$	2,7 –	MT
(9)	$\sim(p \wedge q)$	1,8	MT

(8) Verificar a validade do argumento

$$p \to q, \quad q \to r, \quad s \to t, \quad p \vee s \vdash r \vee t$$

Resolução Temos, sucessivamente

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$q \to r$	P	
(3)	$s \to t$	P	
(4)	$p \vee s$	P	
(5)	$p \to r$	1,2	SH
(6)	$r \vee t$	3,4,5 –	DC

(9) Verificar a validade do argumento

$$p \to q, \quad \sim r \to (s \to t), \quad r \vee (p \vee s), \quad \sim r \vdash q \vee t$$

Resolução Temos, sucessivamente.

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$\sim r \to (s \to t)$	P	
(3)	$r \vee (p \vee s)$	P	
(4)	$\sim r$		
(5)	$s \to t$	2,4	– MP
(6)	$p \vee s$	3,4	– SD
(7)	$q \vee t$	1,5,6	DC

(10) Verificar que é válido o argumento.

$$p \to q,\ (p \to r) \to s \vee q,\ p \wedge q \to r,\ \sim s \vdash q$$

Resolução Temos sucessivamente

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$(p \to r) \to s \vee q$	P	
(3)	$p \wedge q \to r$	P	
(4)	$\sim s$	P	
(5)	$p \to p \wedge q$	1	ABS
(6)	$p \to r$	3,5	SH
(7)	$s \vee q$	2,6	MP
(8)	q	4,7	SD

(11) Verificar a validade do argumento

$$p \to q,\ p \vee (\sim\sim r \wedge \sim\sim q),\ s \to \sim r,\ \sim(p \wedge q) \vdash \sim s \vee \sim q$$

Resolução Temos, sucessivamente

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$p \vee (\sim\sim r \wedge \sim\sim q)$	P	
(3)	$s \to \sim r$	P	
(4)	$\sim(p \wedge q)$	P	
(5)	$p \to p \wedge q$	1	ABS
(6)	$\sim p$	4,5	MT
(7)	$\sim\sim r \wedge \sim\sim q$	2,6	SD
(8)	$\sim\sim r$	7	SIMP
(9)	$\sim s$	3,8	MT
(10)	$\sim s \vee \sim q$	9	AD

(12) Verificar a validade do argumento

$$p \to r,\ q \to s,\ \sim r,\ (p \vee q) \wedge (r \vee s) \vdash s$$

Resolução Temos, sucessivamente

(1)	$p \to r$	P	
(2)	$q \to s$	P	
(3)	$\sim r$	P	
(4)	$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$	P	
(5)	$p \vee q$	4	SIMP
(6)	$r \vee s$	1,2,5	DC
(7)	s	3,6	SD

(13) Verificar que é válido o argumento

$$p \to q,\ q \to r,\ r \to s,\ \sim s,\ p \vee t \vdash t$$

Resolução Temos sucessivamente

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$q \to r$	P	
(3)	$r \to s$	P	
(4)	$\sim s$	P	
(5)	$p \vee t$	P	
(6)	$p \to r$	1,2	SH
(7)	$p \to s$	3,6	SH
(8)	$\sim p$	4,7	MT
(9)	t	5,8	SD

(14) Verificar que é válido o argumento.

$$(p \to q) \wedge (r \to s),\ t \to u,\ u \to v,\ \sim q \vee \sim v \vdash \sim p \vee \sim t$$

Resolução Temos, sucessivamente

(1)	$(p \to q) \wedge (r \to s)$	P	
(2)	$t \to u$	P	
(3)	$u \to v$	P	
(4)	$\sim q \vee \sim v$	P	
(5)	$t \to v$	2,3	SH
(6)	$p \to q$	1	SIMP
(7)	$\sim p \vee \sim t$	4,5,6	DD

(15) Verificar a validade do argumento

$$x = y \to x = z,\ x = z \to x = 1,\ x = 0 \to x \neq 1,\ x = y \vdash x \neq 0$$

Resolução Temos, sucessivamente

(1)	$x = y \to x = z$	P	
(2)	$x = z \to x = 1$	P	
(3)	$x = 0 \to x \neq 1$	P	
(4)	$x = y$	P	
(5)	$x = y \to x = 1$	1,2	SH
(6)	$x = 1$	4,5	MP
(7)	$x \neq 0$	3,6	MT

(16) Verificar a validade do argumento

Se $x = y$, então $x = z$
Se $x = z$, então $x = t$
Ou $x = y$ ou $x = 0$
Se $x = 0$, então $x + u = 1$
Mas $x + u \neq 1$

Portanto $x = t$

Resolução Temos sucessivamente:

(1)	$x = y \rightarrow x = z$	P	
(2)	$x = z \rightarrow x = t$	P	
(3)	$x = y \vee x = 0$	P	
(4)	$x = 0 \rightarrow x + u = 1$	P	
(5)	$x + u \neq 1$	P	
(6)	$x = y \rightarrow x = t$	1,2	SH
(7)	$x \neq 0$	4,5	MT
(8)	$x = y$	3,7	SD
(9)	$x = t$	6,8	MP

(17) Verificar que é **válido** o argumento

$x = y \rightarrow x = z,\ x \neq y \rightarrow x < z,\ x \not< z \vee y > z,\ y \neq z \wedge x \neq z \vdash y > z$

Resolução Temos sucessivamente:

(1)	$x = y \rightarrow x = z$	P	
(2)	$x \neq y \rightarrow x < z$	P	
(3)	$x \not< z \vee y > z$	P	
(4)	$y \neq z \wedge x \neq z$	P	
(5)	$x \neq z$	4	SIMP
(6)	$x \neq y$	1,5	MT
(7)	$x < z$	2,6	MP
(8)	$y > z$	3,7	SD

EXERCÍCIOS

1. Usar a regra "Modus ponens" para **deduzir** de cada um dos seguintes ternos de premissas a **conclusão** indicada:

(a) (1) $p \rightarrow q$
(2) $q \rightarrow r$
(3) p
———
r

(b) (1) $p \rightarrow \sim q$
(2) p
(3) $\sim q \rightarrow r$
———
r

(c) (1) $p \rightarrow q \wedge r$
(2) $q \wedge r \rightarrow s$
(3) p
———
s

(d) (1) $\sim p \rightarrow q \vee r$
(2) $s \vee t \rightarrow \sim p$
(3) $s \vee t$
———
$q \vee r$

2. Usar a **regra** "Modus ponens" para **deduzir** de cada um dos seguintes ternos de premissas a **conclusão** indicada:

(a) (1) $2 > 1 \rightarrow 3 > 1$
(2) $3 > 1 \rightarrow 3 > 0$
(3) $2 > 1$
———
$3 > 0$

(b) (1) $x + 1 = 2$
(2) $x + 1 = 2 \rightarrow y + 1 = 2$
(3) $y + 1 = 2 \rightarrow x = y$
———
$x = y$

(c) (1) $x + 0 = y \rightarrow x = y$
(2) $x + 0 = y$
(3) $x = y \rightarrow x + 2 = y + 2$
———
$x + 2 = y + 2$

(d) (1) $(a > b \wedge b > c) \rightarrow a > c$
(2) $a > b \wedge b > c$
(3) $a > c \rightarrow a > 10$
———
$a > 10$

3. Usar a regra "Modus ponens" para **deduzir** de cada um dos seguintes conjuntos de premissas a **conclusão** indicada:

(a) (1) $(a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c$
(2) $a = c \rightarrow c = a$
(3) $a = b \wedge b = c$
———
$c = a$

(b) (1) $p \rightarrow \sim q$
(2) p
(3) $\sim q \rightarrow r$
(4) $r \rightarrow \sim t$
———
$\sim t$

(c) (1) $p \vee q$
(2) $p \vee q \rightarrow \sim r$
(3) $\sim r \rightarrow s \wedge \sim t$
(4) $s \wedge \sim t \rightarrow u \vee v$
———
$u \vee v$

(d) (1) $\sim p \rightarrow q$
(2) $q \rightarrow r$
(3) $\sim p$
(4) $r \rightarrow \sim s$
(5) $\sim s \rightarrow t$
(6) $t \rightarrow u$
———
u

4. Usar as regras "Modus ponens" e "Modus tollens" para **deduzir** de cada um dos seguintes conjuntos de premissas a **conclusão** indicada:

(a) (1) $p \rightarrow q$ P
(2) $\sim p \rightarrow r$ P
(3) $\sim q$ P
———
r

(b) (1) $p \rightarrow \sim q$ P
(2) $\sim\sim q$ P
(3) $\sim p \rightarrow r \wedge s$ P
———
$r \wedge s$

(c) (1) $p \to q$ P
(2) $q \to \sim r$ P
(3) [illegible] P
(4) p P
$\sim s$

(d) (1) $x \neq 0 \to y = 1$ P
(2) $x = y \to y = t$ P
(3) $y = t \to y \neq$ [illegible] P
(4) $x = y$ P
$x = 0$

5 Usar as regras da "Conjunção", "Simplificação", "Modus ponens" e "Modus tollens" para verificar que são **válidos** os seguintes argumentos

(a) $p \wedge q$, $p \to r$ ⊢ $p \wedge r$
(b) $\sim p \wedge q$, $r \to p$ ⊢ $p \wedge \sim r$
(c) $r \to p$, $r \to q$, r ⊢ $p \wedge q$
(d) $\sim p \to q$, $\sim(r \wedge s)$, $p \to r \wedge s$ ⊢ $\sim p \wedge q$

6 Usar a regra do "Silogismo disjuntivo" para verificar que são **válidos** os seguintes argumentos

(a) $p \vee q$, $\sim r$, $q \to r$ ⊢ p (b) $p \wedge q$, $r \vee s$, $p \to \sim s$ ⊢ r
(c) p, $p \to \sim q$, $q \vee r$ ⊢ $p \wedge r$ (d) p, $p \vee (q \vee r)$, $\sim r$ ⊢ q
(e) $p \vee \sim q$, $\sim\sim q$, $p \to r \wedge s$ ⊢ s

7 Usar a regra do "Silogismo disjuntivo" para **deduzir** de cada um dos seguintes termos de premissas a **conclusão** indicada

(a) (1) $x = y \vee x = z$
(2) $x = z \to x = 6$
(3) $x \neq 6$
$x = y$

(b) (1) $x \neq 0 \to x \neq y$
(2) $x = y \vee x$ [illegible]
(3) $x \neq z$
$x = 0$

(c) (1) $1 + 1 = 2 \wedge 2 + 1 = 3$
(2) $3 - 2 = 1 \vee 2$ [illegible] $\neq 1$
(3) [illegible] $+ 1 = 2 \to 2$ [illegible] $1 = 1$
3 [illegible] $2 = 1$

(d) (1) $x = 0 \vee x = y$
(2) $x = y \to x$ [illegible] z
(3) $x \neq z$
$x = 0$

8 Verificar que são **válidos** os seguintes argumentos

(a) $r \to p \vee q$, [illegible] p ⊢ q
(b) $p \to$ [illegible] q, [illegible] q ⊢ $p \to r$, [illegible]
(c) $p \wedge q$, $p \to r$, $q \to s$ ⊢ $r \wedge s$
(d) $p \to q$, $q \to \sim r$, p ⊢ $\sim r$
(e) $p \to q$, [illegible] q, $p \to r$ ⊢ r
(f) $p \to q$, $p \to r$, p ⊢ $q \wedge r$

(g) $p \to$ [illegible] q, $p \vee r$ ⊢ r
(h) $p \vee \sim q$, $r \to$ [illegible] p, r ⊢ $\sim q$
(i) [illegible] p, [illegible] q, [illegible] q [illegible] $\to p$ ⊢ r
(j) $p \to$ [illegible] q, [illegible] q, $p \to r \vee s$ ⊢ $r \vee s$
(k) $\sim p \vee \sim\sim q$, [illegible] $\sim p$, $\sim t \to \sim q$ ⊢ $\sim\sim t$
(l) $p \to \sim q \wedge r$, p, $s \to q$, $s \vee t$ ⊢ t
(m) $p \wedge q$, $p \to r$, [illegible] $s \to$ [illegible], $q \to s$ [illegible] ⊢ t

9 Verificar que são **válidos** os seguintes argumentos

(a) (1) $x + 8 = 12 \vee x \neq 4$
(2) $x = 4 \wedge y < x$
(3) $x + 8 = 12 \wedge y < x \to y + 8 < 12$
$y + 8 <$ [illegible] 2

(b) (1) $x + 2 < 6 \to x < 4$
(2) $y < 6 \vee x + y \nless 10$
(3) $x + y < 10 \wedge x + 2 < 6$
$x < 4 \wedge y < 6$

(c) (1) x [illegible] $y \to x \neq y + 3$
(2) x [illegible] $y + 3 \vee x + 2 = y$
(3) $x + 2 \neq y \wedge x = 5$
x [illegible] $\wedge x \neq y$

(d) (1) $x <$ [illegible] $x = y$
(2) $x = y \to y \neq 5$
(3) $x < y \wedge y = 5 \to x < 5$
(4) y [illegible] 5
$x < 5$

(e) (1) $3x + 2y =$ [illegible] $8 \wedge x + 4y =$ [illegible] 6
(2) $x = 2 \to 3x + 2y \neq$ [illegible] 8
(3) $x = 2 \vee y = 3$
(4) $x \neq 4 \to y \neq 3$
$x = 4$

(f) (1) $x + 2 > 5 \to x = 4$
(2) $x = 4 \to x + 4 < 7$
(3) $x + 4 < 7$
(4) $x + 2 > 5 \vee (5$ [illegible] $x > 2 \wedge x < 3)$
$x < 3$

(g) (1) $x > 5 \rightarrow x \cdot 6 \vee x > 6$
(2) $x \neq 5 \wedge x \not< 5 \rightarrow x > 5$
(3) $x < 5 \rightarrow x \neq 7$
(4) $x \quad \wedge x \neq 6$
(5) $x \quad 7 \rightarrow x \neq 5$

$x > 6$

10 Usar a regra da "Adição" para verificar que são válidos os seguintes argumentos

a) $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ \sim r \vdash q \vee s$
b) $p \wedge \sim q,\ r \rightarrow q,\ \sim r \rightarrow s \vdash s \vee \sim p$
c) $p,\ q \rightarrow p,\ \sim q \vee r \rightarrow s \vdash s$
d) $p \wedge q \rightarrow s,\ r,\ r \rightarrow p \wedge q \vdash s \vee q$
e) $p \wedge q,\ r \rightarrow q,\ r \vee s,\ p \vee s \rightarrow t \vdash t$

11 Usar a regra da "Adição" para verificar que são válidos os seguintes argumentos

(a) (1) $x > 3 \vee y \not< 4$
(2) $x > 3 \rightarrow x > y$
(3) $x \not> y$

$y \not< 4 \vee x > 2$

(b) (1) $x > y \vee x > 5$
(2) $x \not> 5 \vee y \not< 6$
(3) $x + y = 1 \wedge x \not> y$

$x > y \vee y \not< 6$

(c) (1) $x = 2 \rightarrow x < 3$
(2) $x \neq 4 \wedge x \not< 3$
(3) $x \neq 2 \vee x > 4 \rightarrow x = 5$

$x = 5 \wedge x \neq 4$

(d) (1) $y < 6 \rightarrow y < x$
(2) $y \not< 6 \vee x = 5 \rightarrow y > x$
(3) $y \not< x$

$y \quad x \vee y > x$

(e) (1) $x \quad 2 = 1 \wedge 2 \quad x \neq 1$
(2) $x = \quad \rightarrow 2 \quad x = 1$
(3) $x \quad \vee x + 2 = 5$
(4) $x + 2 = 5 \vee x \quad 2 = 1 \rightarrow x = 3$

$\therefore x = 3$

(f) (1) $x + 2 \neq 5 \vee 2x = 6$
(2) $x + 2 \neq 5 \rightarrow x \neq 3$
(3) $2x \quad 2 = 8 \rightarrow 2x \neq 6$
(4) $x + 3 \quad 8 \wedge 2x \quad 2 \quad 8$

$x \neq 3 \vee x > 2$

12 Deduzir de cada um dos seguintes conjuntos de premissas a conclusão indicada

(a) (1) $\text{sen}\,30^\circ = 0{,}5 \rightarrow \text{csc}\,30^\circ = 2$
(2) $\text{sen}\,30^\circ = 0{,}5$
(3) $\text{csc}\,30^\circ = 2 \rightarrow \text{tg}\,30^\circ = 0{,}58$

$\text{tg}\,30^\circ = 0{,}58 \vee \cos 60^\circ = 0{,}5$

(b) (1) $Dx^3 \quad 3x^2 \wedge D3 = 0$
(2) $Dx^3 = 3x^2 \rightarrow Dx^2 = 2x$
(3) $Dx^2 = 2x \vee Dx^3 \quad 2 \rightarrow x = 2$

$x = 2$

(c) (1) $y < 4 \wedge x = y + 3$
(2) $\sim(x \neq y + 3) \rightarrow x > 2$
(3) $y \not> 2 \rightarrow x \not> 2$
(4) $y > 2 \vee y \quad 3 \rightarrow x > 5$

$y < 3 \vee x > 5$

(d) (1) $x = y \vee x < y$
(2) $y = x + 4$
(3) $(x < 3 \vee x > 5) \wedge y = x + 4 \rightarrow y \neq 8$
(4) $x \neq y$
(5) $y = 6 \vee x < y \rightarrow x < 3$

$(x \quad 4 \vee y \neq 8) \wedge x < 3$

13 Usar a regra do "Silogismo hipotético" para verificar que são válidos os seguintes argumentos

(a) (1) $5x \quad 4 \quad 3x + 4 \rightarrow 5x = 3x + 8$
(2) $2x = 8 \rightarrow x = 4$
(3) $5x = 3x + 8 \rightarrow 2x = 8$

$5x \quad 4 = 3x + 4 \rightarrow x = 4$

(b) (1) $x \neq y \rightarrow y < x$
(2) $(x > 5 \rightarrow y < x) \rightarrow y = 5$
(3) $y \neq 5 \vee x \quad 6$
(4) $x > 5 \rightarrow x \neq y$

$x \quad 6 \vee x > 6$

(c) (1) $z = 5 \rightarrow ((y \quad 3 \rightarrow y + z = 8) \wedge z > y)$
(2) $(xy + z = 11 \rightarrow x \quad 2) \rightarrow (y = 3 \wedge z \quad 5)$
(3) $xy = 6 \rightarrow x = 2$
(4) $xy + z = 11 \rightarrow xy \quad 6$

$y + z = 8$

(d) (1) $5x = 20 \rightarrow x = 4$
(2) $2x = 6 \vee x \neq 3$
(3) $(5x - 3 = 17 \rightarrow x = 4) \rightarrow 2x \neq 6$
(4) $5x - 3 = 17 \rightarrow 5x = 20$

$x \neq 3 \vee x < 4$

(c) (1) $(x + y = 5 \rightarrow y = 3) \vee x + z = 3$
(2) $z \neq 1 \vee (x + z = 3 \rightarrow x + y = 5)$
(3) $x + y \neq 5 \wedge z$ [illegible] 1

$x + z$ [illegible] $3 \rightarrow y = 3$

( ) (1) $x = 3 \rightarrow x > y$
(2) $x \neq 3 \rightarrow z = 5$
(3) $(x = 3 \rightarrow x < z) \rightarrow x \nless z$
(4) $x > y \rightarrow x$ [illegible] z

z [illegible] $5 \vee z > 5$

14 Usar a regra do "Dilema construtivo" para verificar a validade dos seguintes argumentos

(a) (1) $2x + y = 7 \rightarrow 2x = 4$
(2) $2x + y = 5 \rightarrow y = 1$
(3) $2x + y = 7 \vee 2x + y = 5$
(4) $2x \neq 4$

$y = 1$

(b) (1) $x \neq 6 \rightarrow (x = 2 \vee x = 8)$
(2) $3x + 3y = 2$ [illegible] $\wedge x \neq 6$
(3) $x = 2 \rightarrow y = 9$
(4) $x = 8 \rightarrow y = 1$

$y =$ [illegible] $\vee y = 9$

( ) (1) $x > 5 \vee y \nless 6$
(2) $y \nless 6 \rightarrow x < z$
(3) $x > 5 \rightarrow y < z$
(4) $y \nless z \wedge z$ [illegible] 6

$x < z \vee z = 6$

(d) (1) $y = 0 \rightarrow xy = 0$
(2) $y = 0 \vee y \nless 1$
(3) $xy = 0 \vee xy > 3 \rightarrow x \neq 4$
(4) $y \nless$ [illegible] $\rightarrow xy > 3$

$x \neq 4 \vee x > y$

(e) (1) $x < y \vee y < x$
(2) $y < x \rightarrow x > 6$
(3) $x < y \rightarrow x < 7$
(4) $(x > 6 \vee x < 7) \rightarrow y \ngtr 1$
(5) $y > 11 \vee x < 0$

$x < 0 \vee y <$ [illegible]

(f) (1) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \wedge x < 4$
(2) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2 \vee x = 3$
(3) $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$
(4) $x = 3 \rightarrow x^2 = 9$
(5) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^2 = 4 \vee x^2$ [illegible]

(g) (1) $x = 5 \vee x < y$
(2) $x > 5 \vee z < 2 \rightarrow z$ [illegible] $x \vee y =$
(3) $x < y \rightarrow z < 7$
(4) $x = 5 \rightarrow x > 3$
(5) $z < x \rightarrow x$ [illegible] 4
(6) $x > 3 \vee z < 2 \rightarrow y \neq 1$

$x = 4$

(h) (1) $(y = 5 \rightarrow x < y) \wedge x >$ [illegible]
(2) $y > 5 \vee y$ [illegible] 5
(3) $x < y \vee y > 4 \rightarrow x + 1 \ngtr y \wedge y < 9$
(4) $y > 5 \rightarrow y > 4$

$x + 1 \ngtr y \vee x \ngtr 4$

15 Verificar a validade de cada um dos seguintes argumentos

(a) $p \wedge$ [illegible] q, $q \vee$ [illegible] r, $s \rightarrow r$ $\vdash$ $p \wedge$ [illegible] s
(b) $p \vee \sim q$, $\sim q \rightarrow r$, $p \rightarrow s$, $\sim r \vdash s$

(c) $p \to q$, $q \to r$, [illegible] r [illegible] $p \vee (s \wedge t) \vdash$ [illegible] s

(d) $p \vee q$, $q \to t$, $p \to s$, $\sim s \vdash t \wedge (p \vee q)$

(e) $p \vee \sim q$, $\sim q \to \sim r$, $\sim p \to t$, $\sim t \vdash \sim r \wedge \sim t$

(f) $p \to \sim q$, $p \vee r$, $r \to \sim q$, $s \to q$, [illegible] $\vdash$ [illegible] $s \wedge t$

(g) $p \to q$, $q \to r \wedge s$, $p \to t$, $\sim t \vdash s$

(h) p [illegible] q, $q \to r$ [illegible] $r \vdash$ [illegible] p

(i) $p \to q$ [illegible] $q \wedge$ [illegible] r [illegible] $r \to s \vdash$ [illegible] $p \wedge s$

(j) $p \to q$, $p \vee r$, $\sim r \vdash q \vee s$

(k) $p \to t$ [illegible] $q \to r$, $(p$ [illegible] $r) \to$ [illegible] s, $s \vee$ [illegible] $\vdash$ [illegible] t

(l) $p \vee$ [illegible] q, $\sim r$, $p \to r$, $\sim q \to s \vdash$ [illegible] s

(m) $r \to t$, $s \to q$, $(t \vee q) \to$ [illegible] p, $r \vee s \vdash \sim p$

(n) $p \to$ [illegible] q, [illegible] $q \to$ [illegible] s, $(p \to$ [illegible] $s) \to$ [illegible] t, $r \to t \vdash$ [illegible] r

(o) $p \vee q \to \sim r$, $s \to p$, $t \to q$, $s \vee t \vdash u \vee \sim r$

16. Verificar que são **válidos** os seguintes argumentos:

(a) (1) $x = y \vee x > y$
(2) $x < 4 \vee x \not< z$
(3) x [illegible] $y \to x < z$
(4) $x > y \to x < z$

x [illegible] 4

(b) (1) $2x + y$ [illegible] $5 \to 2x = 2$
(2) $2x + y = 5 \vee y$ [illegible] 3
(3) $2x = 2 \to x = 1$
(4) y [illegible] $3 \to$ [illegible]

x [illegible] 1

(c) (1) $x < 3 \vee x > 4$
(2) $x < 3 \to x \neq y$
(3) $x > 4 \to x \neq y$
(4) $x < y \vee x \neq y \to x \neq 4 \wedge x = 2$

x [illegible] 2

(d) (1) $x = 3 \to 2x^2$ [illegible] 18
(2) x [illegible] $3 \vee x =$ [illegible] 3
(3) $x =$ [illegible] $3 \to 2x^2$ [illegible] 18
(4) $2x^2 = 18 \to x^2 = 9$

$x^2 = 9$

(e) (1) $z > x \to x \neq 7$
(2) $x < 6 \vee x = 3$
(3) $x = 3 \to z > x$
(4) $x < 6 \to z > x$
(5) $x = 7 \vee x = 5$

$x = 5$

(f) (1) $x = 3 \vee x = 4$
(2) $x = 3 \to x^2$ [illegible] $7x + 12 = 0$
(3) $x = 4 \to x^2$ [illegible] $7x + 12 = 0$
(4) x^2 [illegible] $7x + 12 = 0 \to x > 2$
(5) $x^2 < 9 \to x \not> 2$
(6) $x^2 \not< 9 \to x^2 = 9 \vee x^2 > 9$

x^2 [illegible] $9 \vee x^2 > 9$

(g) (1) $x > y \vee x < 4$
(2) $x < 4 \to x < y \wedge y \not< 4$
(3) $x > y \to x$ [illegible] 4
(4) $x \neq 4$

$x < y$

(h) (1) $x = \frac{?\pi}{6} \to \operatorname{sen} x =$ [illegible]
(2) x [illegible] $\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$
(3) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \to \operatorname{cosec} x = 2$
(4) $x = \frac{\pi}{6} \to \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \operatorname{cosec} x = 2$

(i) (1) $x + 2y = 5 \vee 3x + 4y = 11$
(2) $x > y \vee x \not< 2 \to y < 2 \vee y <$ [illegible]
(3) $3x + 4y = 11 \to x =$ [illegible]
(4) $x > y \vee x \not< 2$
(5) $x + 2y = 5 \to x = 1$

$x =$ [illegible] $\wedge (y < 2 \vee y < 1)$

7. Usar as **Regras de Inferência** para mostrar que são **válidos** os seguintes argumentos:

(a) $p \vee q \to r$, p, $s \to r$ [illegible] s
(b) $p \wedge (q \vee r)$, $q \vee r \to s$, $s \vee$ [illegible] t
(c) $p \vee q \to r$, q, $s \wedge r \to$ [illegible] $s \wedge t$)
(d) $p \to q$, $\sim q$, $p \vee \sim r \to s$ [illegible] s
(e) $p \vee (q \wedge r)$, $q \to s$, $r \to t$, $s \wedge t \to p \vee r$ [illegible] p [illegible]
(f) $q \vee (r \to t)$, $q \to s$, $\sim s \to (t \to p)$, $\sim s \vdash r \to p$
(g) $p \vee q \to (p \to s \wedge t)$, $p \wedge r \vdash t \vee u$

Capítulo 12

Validade Mediante Regras de Inferência e Equivalências

1. REGRA DE SUBSTITUIÇÃO

Há muitos argumentos cuja **validade não se pode demonstrar**, **verificar** ou testar com o uso exclusivo das **dez** Regras de Inferência dadas anteriormente (Cap. 7), sendo necessário recorrer a um princípio de inferência adicional, a "Regra de substituição" de proposições equivalentes seguinte:

Uma proposição qualquer P ou apenas uma parte de P pode ser substituída por uma proposição equivalente, e a proposição Q que assim se obtém é equivalente à P.

2. EQUIVALÊNCIAS NOTÁVEIS

A fim de facilitar o emprego da "Regra de substituição" damos a seguir uma lista de proposições equivalentes, que podem substituir-se mutuamente onde quer que ocorram:

I. Idempotência (ID)

(i) $p \Leftrightarrow p \wedge p$, (ii) $p \Leftrightarrow p \vee p$

II. Comutação (COM)

(i) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, (ii) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

III. Associação (ASSOC)

(i) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
(ii) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

IV Distribuição (DIST)

(i) $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(ii) $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

V Dupla negação (DN)

$$p \Longleftrightarrow \sim\sim p$$

VI De Morgan (DM)

(i) $\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$
(ii) $\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

VII Condicional (COND)

$$p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$$

VIII Bicondicional (BICOND)

(i) $p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
(ii) $p \leftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

IX Contraposição (CP)

$$p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

X Exportação-Importação (EI)

$$p \wedge q \rightarrow r \Longleftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Estas equivalências notáveis constituem **dez Regras de Inferência** adicionais que se usam para **demonstrar**, **verificar** ou **testar** a **validade** de argumentos mais complexos.

Uma importante diferença no modo de aplicar as **dez primeiras** Regras de Inferência e estas **dez últimas** Regras de Inferência deve ser observada: as **dez primeiras** Regras de Inferência só podem ser aplicadas a **linhas completas** de uma demonstração ou dedução, ao passo que as **dez últimas** Regras de Inferência podem ser aplicadas tanto a **linhas completas** como a **partes de linhas completas** consoante a "Regra de substituição".

Definição — Dado um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$, chama-se **demonstração** ou **dedução** de Q, a partir das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, toda a sequência finita de proposições $X_1, X_2, \ldots, X_k$ tais que cada X_i ou é uma premissa ou resulta de proposições anteriores da sequência pelo uso de uma Regra de Inferência, e de tal modo que a última proposição X_k da sequência seja a conclusão Q do argumento dado.

3. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Demonstrar que é **válido** o argumento $p \rightarrow \sim q,\ q \vdash \sim p$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow \sim q$	P	
(2)	q	P	
(3)	$\sim\sim q \rightarrow \sim p$	1	CP
(4)	$q \rightarrow \sim p$	3	DN
(5)	$\sim p$	2,4	MP

(2) Demonstrar que é **válido** o argumento $p \rightarrow q,\ r \rightarrow \sim q \vdash p \rightarrow \sim r$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow q$	P	
(2)	$r \rightarrow \sim q$	P	
(3)	$\sim\sim q \rightarrow \sim r$	2	CP
(4)	$q \rightarrow \sim r$	3	DN
(5)	$p \rightarrow \sim r$	1,4	SH

(3) Demonstrar que é **válido** o argumento $p \vee (q \wedge r),\ p \vee q \rightarrow s \vdash p \vee s$

Dem. — Temos, sucessivamente:

(1)	$p \vee (q \wedge r)$	P	
(2)	$p \vee q \rightarrow s$	P	
(3)	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	1	DIST
(4)	$p \vee q$	3	SIMP
(5)	s	2,4	MP
(6)	$p \vee s$	5	AD

(4) Demonstrar que é válido o argumento: $p \vee q \rightarrow r \wedge s,\ \sim s \vdash \sim q$

Dem. Temos sucessivamente

(1)	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	P	
(2)	$\sim s$	P	
(3)	$\sim r \vee \sim s$	2	AD
(4)	$\sim(r \wedge s)$	3	DM
(5)	$\sim(p \vee q)$	1,4	MT
(6)	$\sim p \wedge \sim q$	5	DM
(7)	$\sim q$	6	SIMP

(5) Demonstrar a **validade** do argumento: "Se Londres não fica na Bélgica, então Paris não fica na França. Mas Paris fica na França. Logo, Londres fica na Bélgica".

Dem. Representando as proposições "Londres fica na Bélgica" e "Paris fica na França" respectivamente por p e q, o argumento dado na forma simbólica escreve-se:

$$\sim p \rightarrow \sim q,\quad q \vdash p$$

Portanto, temos sucessivamente:

(1)	$\sim p \rightarrow \sim q$	P	
(2)	q	P	
(3)	$\sim\sim p \vee \sim q$	1	COND
(4)	$p \vee \sim q$	3	DN
(5)	$\sim\sim q$	2	DN
(6)	p	4,5	SD

Logo, o argumento dado é **válido**, embora sua conclusão seja uma proposição falsa.

(6) Demonstrar a **validade** do argumento

$$(p \vee \sim q) \vee r,\quad \sim p \vee (q \wedge \sim p) \vdash q \rightarrow r$$

Dem. Temos sucessivamente

(1)	$(p \vee \sim q) \vee r$	P	
(2)	$\sim p \vee (q \wedge \sim p)$	P	
(3)	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim p)$	2	DIST
(4)	$(\sim p \vee q) \wedge \sim p$	3	ID
(5)	$\sim p$	4	SIMP

(6)	$p \vee (\sim q \vee r)$	1	ASSOC
(7)	$\sim q \vee r$	5,6	SD
(8)	$q \rightarrow r$	7	COND

(7) Demonstrar a **validade** do argumento

$$p \rightarrow \sim q,\quad r \rightarrow q,\quad r \vdash \sim p$$

Dem. Temos, sucessivamente

(1)	$p \rightarrow \sim q$	P	
(2)	$r \rightarrow q$	P	
(3)	r	P	
(4)	$\sim q \rightarrow \sim r$	2	CP
(5)	$p \rightarrow \sim r$	1,4	SH
(6)	$\sim\sim r \rightarrow \sim p$	5	CP
(7)	$r \rightarrow \sim p$	6	DN
(8)	$\sim p$	3,7	MP

(8) Demonstrar a **validade** do argumento

$$p \rightarrow q,\quad q \leftrightarrow s,\quad t \vee (r \wedge \sim s) \vdash p \rightarrow t$$

Dem. Temos sucessivamente

(1)	$p \rightarrow q$	P	
(2)	$q \leftrightarrow s$	P	
(3)	$t \vee (r \wedge \sim s)$	P	
(4)	$(q \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow q)$	2	BICOND
(5)	$q \rightarrow s$	4	SIMP
(6)	$p \rightarrow s$	1,5	SH
(7)	$(t \vee r) \wedge (t \vee \sim s)$	3	DIST
(8)	$t \vee \sim s$	7	SIMP
(9)	$\sim s \vee t$	8	COM
(10)	$s \rightarrow t$	9	COND
(11)	$p \rightarrow t$	6,10	SH

(9) Demonstrar a **validade** do argumento: "Se estudo, então não sou reprovado em Física. Se não jogo basquete, então estudo. Mas fui reprovado em Física. Portanto, joguei basquete."

Dem. Representando "Estudo" por p, "Sou reprovado em Física" por q e "Jogo basquete" por r, o argumento dado sob **forma simbólica** escreve-se

$$p \rightarrow \sim q,\quad \sim r \rightarrow p,\quad q \vdash r$$

Posto isto, temos sucessivamente:

(1)	$p \to \sim q$	P	
(2)	$\sim r \to p$	P	
(3)	q	P	
(4)	$\sim\sim q$	3	DN
(5)	$\sim p$	1,4	MT
(6)	$\sim\sim r \vee p$	2	COND
(7)	$r \vee p$	6	DN
(8)	r	5,7	SD

Logo, o argumento dado é válido.

(10) Demonstrar que é válido o argumento:

$$p \vee (q \wedge r),\ \ p \to s,\ \ s \to r \vdash r$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \vee (q \wedge r)$	P	
(2)	$p \to s$	P	
(3)	$s \to r$	P	
(4)	$p \to r$	2,3	SH
(5)	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	1	DIST
(6)	$p \vee r$	5	SIMP
(7)	$r \vee p$	6	COM
(8)	$\sim\sim r \vee p$	7	DN
(9)	$\sim r \to p$	8	COND
(10)	$\sim r \to r$	4,9	SH
(11)	$\sim\sim r \vee r$	10	COND
(12)	$r \vee r$	11	DN
(13)	r	12	ID

(11) Demonstrar que é válido o argumento:

$$p \wedge q \to \sim r,\ \ r \vee (s \wedge t),\ \ p \leftrightarrow q \vdash p \to s$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \wedge q \to \sim r$	P	
(2)	$r \vee (s \wedge t)$	P	
(3)	$p \leftrightarrow q$	P	
(4)	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	3	BICOND
(5)	$p \to q$	4	SIMP

(6)	$p \to p \wedge q$	5	ABS
(7)	$p \to \sim r$	1,6	SH
(8)	$(r \vee s) \wedge (r \vee t)$	2	DIST
(9)	$r \vee s$	8	SIMP
(10)	$\sim\sim r \vee s$	9	DN
(11)	$\sim r \to s$	10	COND
(12)	$p \to s$	7,11	SH

(12) Demonstrar que é válido o argumento:

$$p \to q,\ \ r \to s,\ \ q \vee s \to \sim t,\ \ t \vdash \sim p \wedge \sim r$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$r \to s$	P	
(3)	$q \vee s \to \sim t$	P	
(4)	t	P	
(5)	$\sim\sim t$	4	DN
(6)	$\sim(q \vee s)$	3,5	MT
(7)	$\sim q \wedge \sim s$	6	DM
(8)	$\sim q$	7	SIMP
(9)	$\sim s$	7	SIMP
(10)	$\sim p$	1,8	MT
(11)	$\sim r$	2,9	MT
(12)	$\sim p \wedge \sim r$	10,11	CONJ

(13) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \to q,\ \ q \to (p \to (r \vee s)),\ \ r \leftrightarrow s,\ \ \sim(r \wedge s) \vdash \sim p$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$q \to (p \to (r \vee s))$	P	
(3)	$r \leftrightarrow s$	P	
(4)	$\sim(r \wedge s)$	P	
(5)	$(r \wedge s) \vee (\sim r \wedge \sim s)$	3	BICOND
(6)	$\sim r \wedge \sim s$	5	SIMP
(7)	$\sim(r \vee s)$	6	DM
(8)	$p \to (p \to (r \vee s))$	1,2	SH
(9)	$(p \wedge p) \to (r \vee s)$	8	EI
(10)	$p \to r \vee s$	9	ID
(11)	$\sim p$	7,10	MT

(14) Demonstrar a **validade** do argumento:

$$p \to q,\ q \to r,\ r \to p,\ p \to \sim r \vdash \sim p \wedge \sim r$$

Dem. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$q \to r$	P	
(3)	$r \to p$	P	
(4)	$p \to \sim r$	P	
(5)	$p \to r$	1,2	SH
(6)	$(p \to r) \wedge (r \to p)$	3,5	AD
(7)	$p \leftrightarrow r$	6	BICOND
(8)	$(p \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim r)$	7	BICOND
(9)	$\sim p \vee \sim r$	4	COND
(10)	$\sim(p \wedge r)$	9	DM
(11)	$\sim p \wedge \sim r$	8,10	SD

(15) Demonstrar que é **válido** o argumento

$$\sim p \vee q \to r,\ r \vee s \to \sim t,\ t \vdash \sim q$$

Dem. Temos, sucessivamente

(1)	$\sim p \vee q \to r$	P	
(2)	$r \vee s \to \sim t$	P	
(3)	t	P	
(4)	$\sim\sim t$	3	DN
(5)	$\sim(r \vee s)$	2,4	MT
(6)	$\sim r \wedge \sim s$	5	DM
(7)	$\sim r$	6	SIMP
(8)	$\sim(\sim p \vee q)$	1,7	MT
(9)	$\sim\sim p \wedge \sim q$	8	DM
(10)	$p \wedge \sim q$	9	DN
(11)	$\sim q$	10	SIMP

(16) Demonstrar a **validade** do argumento

(1) $x < 6$
(2) $y > 7 \vee x = y \to \sim(y = 4 \wedge x < y)$
(3) $y \neq 4 \to x \nless 6$
(4) $x < 6 \to x < y$

$x \neq y$

Dem. Temos, sucessivamente

(1)	$x < 6$	P	
(2)	$y > 7 \vee x = y \to \sim(y = 4 \wedge x < y)$	P	
(3)	$y \neq 4 \to x \nless 6$	P	
(4)	$x < 6 \to x < y$	P	
(5)	$x < y$	1,4	MP
(6)	$y = 4$	1,3	MT
(7)	$y = 4 \wedge x < y$	5,6	CONJ
(8)	$\sim\sim(y = 4 \wedge x < y)$	7	DN
(9)	$\sim(y > 7 \vee x = y)$	2,8	MT
(10)	$y \ngtr 7 \wedge x \neq y$	9	DM
(11)	$x \neq y$	10	SIMP

(17) Demonstrar a **validade** do argumento

(1) $y \neq 1 \wedge y \nless 1$
(2) $y \ngtr 1 \to y < 1 \vee y = 1$
(3) $x = 3 \vee x > 3$
(4) $x > 3 \to x \neq y$
(5) $x = 3 \to x \neq y$

$\sim(x = y \vee y \ngtr 1)$

Dem. Temos, sucessivamente

(1)	$y \neq 1 \wedge y \nless 1$	P	
(2)	$y \ngtr 1 \to y < 1 \vee y = 1$	P	
(3)	$x = 3 \vee x > 3$	P	
(4)	$x > 3 \to x \neq y$	P	
(5)	$x = 3 \to x \neq y$	P	
(6)	$x \neq y \vee x \neq y$	3,4,5	DC
(7)	$x \neq y$	6	ID
(8)	$y \nless 1 \wedge y \neq 1$	1	COM
(9)	$\sim(y < 1 \vee y = 1)$	8	DM
(10)	$y > 1$	2,9	MT
(11)	$x \neq y \wedge y > 1$	7,10	CONJ
(12)	$\sim(x = y \vee y \ngtr 1)$	11	DM

(18) Demonstrar a **validade** do argumento

(1) $x = y \to x \nless y$
(2) $y = 0 \leftrightarrow x \nless y$
(3) $x = 0 \vee xy = 0 \to y = 0$
(4) $(x = y \to y = 0) \to x = 0$

$\sim(x < y \wedge x = 1)$

Dem. Temos, sucessivamente

(1)	$x = y \to x \nless y$	P	
(2)	$y = 0 \leftrightarrow x \nless y$	P	
(3)	$x = 0 \lor xy = 0 \to y = 0$	P	
(4)	$(x = y \to y = 0) \to x = 0$	P	
(5)	$(y = 0 \to x \nless y) \land (x \nless y \to y = 0)$	2	BICOND
(6)	$x \nless y \to y = 0$	5	SIMP
(7)	$x = y \to y = 0$	1,6	SH
(8)	$x = 0$	4,7	MP
(9)	$x = 0 \lor xy = 0$	8	AD
(10)	$y = 0$	3,9	MP
(11)	$y = 0 \to x \nless y$	5	SIMP
(12)	$x \nless y$	10,11	MP
(13)	$x \nless y \lor x \neq 1$	12	AD
(14)	$\sim(x < y \land x = 1)$	13	DM

(10) Demonstrar a **validade** do argumento

(1) $x < y \land y < z \to x < z$
(2) $(y < z \to x < z) \to z = 3$
(3) $x < y$
$\vdash z = 3$

Dem. Temos, sucessivamente

(1)	$x < y \land y < z \to x < z$	P	
(2)	$(y < z \to x < z) \to z = 3$	P	
(3)	$x < y$	P	
(4)	$x < y \to (y < z \to x < z)$	1	EI
(5)	$y < z \to x < z$	3,4	MP
(6)	$z = 3$	2,5	MP

4 INCONSISTÊNCIA

Duas ou mais proposições que **não podem ser simultaneamente verdadeiras** dizem-se **inconsistentes**. Também se diz que formam um conjunto **inconsistente** de proposições.

Um argumento se diz **inconsistente** se as suas premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras (são inconsistentes).

As proposições

$$\sim(p \lor \sim q), \quad p \lor \sim r, \quad q \to r$$

p. ex., são **inconsistentes**, pois, é impossível encontrar uma atribuição de valores às proposições simples componentes p, q e r que torne essas três proposições compostas simultaneamente verdadeiras. Com efeito, construindo as tabelas-verdade dessas três proposições verifica-se que, em cada linha, pelo menos uma delas é falsa (F), isto é, não há uma só linha em que admitam, todas, o valor lógico V.

~	(p	∨	~	q)	p	∨	~	r	q	→	r
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F

Também se pode demonstrar que as três proposições dadas são **inconsistentes** deduzindo do seu conjunto uma **contradição** qualquer, p. ex., do tipo $A \land \sim A$, mediante as **regras de dedução** usadas para os argumentos, pois, como estas **regras** preservam a verdade, a **contradição** que se obtém prova que estas três proposições não podem ser conjuntamente verdadeiras. Realmente, temos, sucessivamente:

(1)	$\sim(p \lor \sim q)$		
(2)	$p \lor \sim r$		
(3)	$q \to r$		
(4)	$\sim p \land \sim\sim q$	1	DM
(5)	$\sim p \land q$	4	DN
(6)	q	5	SIMP
(7)	r	3,6	MP
(8)	$\sim p$	5	SIMP
(9)	$\sim r$	2,8	SD
(10)	$r \land \sim r$	7,9	CONJ (Cont.)

Outros exemplos

(1) Demonstrar que são **inconsistentes** as três seguintes proposições

(1) $x = 1 \to y < x$
(2) $y < x \to y = 0$
(3) $\sim(y = 0 \lor x \neq 1)$

Dem. Temos, sucessivamente

(1)	$x = 1 \rightarrow y < x$		
(2)	$y < x \rightarrow y = 0$		
(3)	$\sim(y = 0 \vee x \neq 1)$		
(4)	$x = 1 \rightarrow y = 0$	1,2	SH
(5)	$y \neq 0 \wedge x = 1$	3	DM
(6)	$x = 1$	5	SIMP
(7)	$y = 0$	4,6	MP
(8)	$y \neq 0$	5	SIMP
(9)	$y = 0 \wedge y \neq 0$	7,8	CONJ (Contr.)

(2) Demonstrar que é **inconsistente** o conjunto das seguintes proposições

$$p \vee \sim q, \quad p \wedge s, \quad \sim s \vee r, \quad r \rightarrow r \wedge q$$

Dem. Temos, sucessivamente

(1)	$\sim p \vee \sim q$		
(2)	$p \wedge s$		
(3)	$\sim s \vee r$		
(4)	$r \rightarrow r \wedge q$		
(5)	p	2	SIMP
(6)	s	2	SIMP
(7)	$\sim q$	1,5	SD
(8)	r	3,6	SD
(9)	$r \wedge q$	4,8	MP
(10)	q	9	SIMP
(11)	$q \wedge \sim q$	7,10	CONJ (Contr.)

(3) Demonstrar que é **consistente** o conjunto das seguintes proposições

$$\sim(p \vee q), \quad r \rightarrow s, \quad \sim q \wedge r$$

Dem. Com efeito, para a seguinte atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes p, q, r e s

V	F
r	p
s	q

as três proposições compostas dadas são simultâneamente verdadeiras, pois, temos

$\sim(F \vee F) = \sim F = V$, $V \rightarrow V = V$, $\sim F \wedge V = V \wedge V = V$

EXERCÍCIOS

1. Demonstrar a **validade** dos seguintes argumentos

(a) $p \rightarrow \sim q$, q, $\sim p \rightarrow r \wedge s \vdash r \wedge s$
(b) $p \rightarrow q$, $p \rightarrow \sim r$, $\sim q \vdash \sim r$
(c) $p \rightarrow \sim r$, $q \rightarrow r$, $q \vdash \sim p$
(d) $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, $r \vdash p$
(e) $p \vee q$, $\sim p \rightarrow r$, $\sim r \vdash q$
(f) $r \rightarrow p \vee q$, $\sim\sim r$, $\sim q \vdash p$
(g) $p \vee q$, $\sim q$, $\sim(q \wedge r) \rightarrow p \vdash r$
(h) p, $q \rightarrow p \vdash q \vee s$
(i) $p \wedge q$, $q \rightarrow r$, $r \vdash p$
(j) $p \wedge q$, q, $p \rightarrow r$
(k) $p \wedge \sim q \vdash p$
(l) $p \vee q$, $\sim q$, $p \rightarrow r \wedge s \vdash s \wedge r$
(m) $(r \wedge \sim t) \rightarrow \sim s$, $p \rightarrow s$, $p \wedge q \vdash \sim(r \wedge \sim t)$
(n) $(r \wedge s) \vee p$, $q \rightarrow p$, $t \rightarrow p \vdash \dots \vdash s \wedge r$
(o) $p \vee \sim q$, $\sim r \rightarrow p$, $r \rightarrow \sim s$, $s \vdash q$
(p) $p \rightarrow q \vee r$, $\sim\sim p$, $\sim r \vdash q$
(q) $r \rightarrow p$, q, $r \vee s$, $s \vdash q \wedge p$
(r) $p \wedge q$, $q \rightarrow r$, $p \rightarrow r$, $s \rightarrow r \vdash s$
(s) $p \wedge q$, $p \rightarrow r$, $q \vee \sim s \vdash \sim(r \vee s)$
(t) $s \rightarrow (p \vee \dots)$, $t \rightarrow q \wedge r$, $s \vdash r \wedge \dots$
(u) $\sim p \rightarrow q$, $r \rightarrow q$, $r \vee \sim p$, $\sim q \vee s \vdash s$
(v) $t \rightarrow p \wedge s$, $q \rightarrow p$, $r \rightarrow s$, $r \vee q \vdash t$
(w) $r \rightarrow \sim p$, $(r \wedge s) \vee t$, $t \rightarrow q \vee u$, $\sim q \wedge \sim u \vdash \sim p$
(x) $p \vee q$, $s \rightarrow q \wedge r$, $p \rightarrow s$, $q \rightarrow s \vdash r \wedge q$
(y) $\sim(p \vee \sim t)$, $p \vee q$, $r \rightarrow s$, $q \wedge s \rightarrow t \wedge s \vdash s \wedge t$
(z) $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r \vdash p \vee \dots$

2. Demonstrar a **validade** dos seguintes argumentos

(a)
(1) $x > y \rightarrow x > z$
(2) $z \ngtr 6 \rightarrow \sim(x > y \rightarrow z < 7)$
(3) $x > z \rightarrow z < 7$

$z > 6 \vee z < y$

(b)
(1) $x \neq y \rightarrow x > y \vee x < y$
(2) $x > y \vee x < y \rightarrow x \neq 4$
(3) $x < y \rightarrow \sim(x \neq y \rightarrow x \neq 4)$
(4) $x \neq y$

$x > y$

(c) (1) $x = 3 \vee y = 3$
(2) $x > 2 \vee x + y \not> 5$
(3) $y = 3 \vee x$ [illegible] $\rightarrow x + y > 5$
(4) $(y < 5 \wedge y > 3) \rightarrow x \not>$ [illegible]

$y <$ [illegible]

(d) (1) $x < 3 \wedge y > 6$
(2) $y \neq 7 \rightarrow (x = 2 \wedge y > x)$
(3) y [illegible] $6 \wedge x < 3 \rightarrow y > x \wedge x = 2$

y [illegible] 7

(e) (1) $y \neq 3$
(2) $x + y$ [illegible] $x + y = 3$
(3) $x + y = 8 \vee x \neq 5$

$(x = 5 \wedge y$ [illegible] $4)$

(f) (1) $x \nless y$
(2) $x < y \vee$ [illegible] $x \neq 3 \vee x + y$ [illegible] $5)$
(3) $x > 3 \rightarrow$ [illegible] $x \not>$ [illegible] $\neq 2)$

$x > y$

(g) (1) [illegible] x [illegible] $2 \vee x + y \not> x)$
(2) [illegible] $x > y \vee y$ [illegible] $5)$
(3) $x =$ [illegible] $\rightarrow x + y \not> x$

$(x$ [illegible] $\vee y <$ [illegible]

(h) (1) $x =$ [illegible] $\rightarrow x < y$
(2) x^2 [illegible] $4x + 3 = 0 \rightarrow x =$ [illegible] $\vee x = 3$
(3) [illegible] $x = y \vee x^2$ [illegible] $4x + 3 \neq 0)$
(4) x [illegible] $3 \rightarrow x < y$

$x < y \vee y \neq 4$

(i) (1) [illegible] $(x > y \wedge x + y > 7)$
(2) $x \not> y \rightarrow x <4$
(3) $x + y \not> 7 \rightarrow x < 4$
(4) x [illegible] y [illegible] $2 \rightarrow x \nless 4$

x [illegible] $y \neq 2$

(j) (1) [illegible] $< 3 \vee x > y) \wedge y =$ [illegible]
(2) $x \nless y$ [illegible] $x = 1$
(3) $x > z \rightarrow x > y$
(4) $x \not> z \rightarrow x < y$

$x =$ [illegible]

(k) (1) $3x + y = 11 \leftrightarrow 3x = 9$
(2) $3x = 9 \rightarrow 3x + y = 11 \leftrightarrow y = 2$
(3) $y \neq 2 \vee x + y = 5$

$x + y$ [illegible] 5

(l) (1) $2x = 6 \leftrightarrow x$ [illegible] 3
(2) $2x = 8 \leftrightarrow x = 4$
(3) $2x$ [illegible] $6 \vee x = 4$

[illegible] $(2x \neq 8 \wedge x \neq 3)$

(m) (1) [illegible] $\leftrightarrow x$ [illegible] 5
(2) $5x$ [illegible] $15 \wedge 4x$ [illegible] 2
(3) $x =$ [illegible] $x + 2y =$ [illegible]

$\sim(y = 2 \wedge x + 2y \neq 7)$

(n) (1) $y \not> x \leftrightarrow x = y \vee x < y$
(2) [illegible] $(y$ [illegible] $y \not> x)$

$x \nless y \wedge x \neq y$

(o) (1) $x < y$ [illegible] $y > 4$
(2) y [illegible] 6 [illegible] $\rightarrow x + y = 10$
(3) $y > 4 \wedge x + y =$ [illegible]

$x < y \wedge y$ [illegible] 6

(p) (1) $x > y \vee x < 6$
(2) $x > y \rightarrow x > 4$
(3) $x > 4 \rightarrow x = 5 \wedge x < 7$
(4) $x <$ [illegible] $\rightarrow x$ [illegible] $5 \wedge x <$ [illegible]
(5) $x < 7 \wedge x = 5 \rightarrow z > x \vee y < z$
(6) $x > y \rightarrow \sim(y < z \vee z > x)$

$x < 6$

3 Demonstrar a validade dos seguintes argumentos

(a) $r \rightarrow p \wedge q$, [illegible] $p \vee$ [illegible] q, $r \vee s \vdash$ [illegible] s
(b) $p \vee q \rightarrow r$ [illegible] r, [illegible] $p \rightarrow$ [illegible]
(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ [illegible] r, [illegible] $p \vee q) \vee s \vdash$ [illegible] s
(d) [illegible] $(p \wedge q$ [illegible] $r \rightarrow s)$, [illegible] s, [illegible] $\rightarrow t \vdash$ [illegible] t
(e) p [illegible] $(q \vee$ [illegible] $r)$, [illegible] p [illegible] $r \rightarrow s$ [illegible] $t \vdash$ [illegible] $s \vee$ [illegible]
(f) $p \vee q \rightarrow r$ [illegible] r [illegible] $q \vee (s \vee t) \vdash$ [illegible] $s \rightarrow t$
(g) $p \vee (q \rightarrow r)$, [illegible] $(p \vee s) \wedge \sim r \vdash$ [illegible] q
(h) $(p \rightarrow q) \rightarrow$ [illegible] $r \vee s$, [illegible] $p \wedge$ [illegible] $q)$ [illegible] $\rightarrow u \vdash$ [illegible] u
(i) [illegible] $p \vee q$, [illegible] $s \rightarrow r$ [illegible] $p \vee (r \wedge t) \vdash$ [illegible] $r \vee s$

(j) $p \to q,\ p \vee (r \wedge s) \vdash$ [illegible] $q \to s$

(k) $p \to q \vee r,$ [illegible] $r \vdash$ [illegible] $p \to q$

(l) $p \vee$ [illegible] $\to r,$ [illegible] $\to s \vdash$ [illegible] $s \to p$

(m) $p \vee q$ [illegible] $\to r$ [illegible] $s \to$ [illegible] $r \vdash$ [illegible] $s \to p$

(n) $p \to q$ [illegible] $s \vdash$ [illegible] p

(o) $p \vee q$ [illegible] $p \vee r \to s \wedge t \vdash$ [illegible] s

(p) $p \to q) \vee (r \wedge s)$ [illegible] $q \vdash$ [illegible] $p \vee s$

(q) $p \to q,$ [illegible] $\to r \vee s,$ [illegible] $r \vee s \to$ [illegible] $(p \to \sim t) \to u \vdash$ [illegible] u

(r) $p \vee q \to r \wedge s$ [illegible] $r \vdash$ [illegible] p

4. Demonstrar que os seguintes conjuntos de proposições são **inconsistentes** deduzindo uma contradição para cada um deles

(a) (1) $q \to p$
(2) $\sim(p \vee r)$
(3) $q \vee r$

(b) (1) $p \vee$ [illegible] q
(2) [illegible] $(q \to r)$
(3) $p \to r$

(c) (1) $\sim(p \vee q)$
(2) $\sim q \to r$
(3) $r \vee s$
(4) $p \to$ [illegible] s

(d) (1) $p \vee s \to q$
(2) $q \to \sim r$
(3) $t \to p$
(4) [illegible] r

(e) (1) $x = y \to x < 4$
(2) $x \nless 4 \vee x <$ [illegible]
(3) $\sim(x < z \vee x \neq y)$

(f) (1) [illegible] $\to x + y$ [illegible]
(2) $x >$ [illegible] $\wedge x = 0$
(3) $x + y = y$ [illegible] $\ngtr 1$

(g) (1) $x = y \to x < z$
(2) $x \nless z$ [illegible] $(x = y \vee$ [illegible] $< z$
(3) $y < z \to x <$ [illegible]

(h) (1) $x <$ [illegible] $y \to x \neq y$
(2) $y > z \to z \nless y$
(3) $x = y \wedge y$ [illegible] z
(4) $x <$ [illegible] $y \vee z$ [illegible] y

5. Demonstrar que os seguintes conjuntos de proposições são **consistentes**

(a) (1) $p \to q$
(2) $q \to r$
(3) [illegible] $r \vee s$

(b) (1) $p \to$ [illegible]
(2) $\sim q \to r$
(3) $p \vee r$

(c) (1) $\sim p \vee \sim q$
(2) $p \to$ [illegible]
(3) [illegible] r

(d) (1) $p \to q$
(2) $r \to q$
(3) $q \to \sim s$

(e) (1) $x = y \to x \neq y$
(2) x [illegible] $y \vee x = y$
(3) $x \nless y \to x <$ [illegible] y

(f) (1) $x = 2 \vee x = 3$
(2) $x \neq 2 \vee x \neq 3$

Capítulo 13

Demonstração Condicional e Demonstração Indireta

1. DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

Outro método muito útil para **demonstrar a validade** de um argumento é a **"Demonstração condicional"**. Esta demonstração, todavia, só pode ser usada se a **conclusão** do argumento tem a **forma condicional**.

Seja o argumento

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash A \to B \qquad (1)$$

cuja **conclusão** é a **condicional** $A \to B$.

Sabemos que este argumento é **válido** se e somente se a "condicional associada":

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to (A \to B)$$

é **tautológica**. Ora, pela **"Regra de Importação"**, esta "condicional associada" é **equivalente** à seguinte

$$[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge A] \to B$$

Assim sendo, o argumento (1) é **válido** se e somente se também é **válido** o argumento

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, A \vdash B$$

cujas **premissas** são todas aquelas do primitivo argumento (1), **mais uma**, A, e cuja **conclusão** é B (observe-se que A e B são respectivamente o **antecedente** e o **consequente** da condicional do primitivo argumento (1)).

Em resumo, temos a seguinte **regra DC**: Para demonstrar a **validade** do argumento (1), cuja conclusão tem **forma condicional**, $A \to B$, introduz-se A como **"premissa adicional"** (indicada por PA) e deduz-se B.

2. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Demonstrar a **validade** do argumento

$$p \vee (q \rightarrow r),\ \sim r \vdash q \rightarrow p$$

Dem. De conformidade com a Regra DC para demonstração de um argumento cuja conclusão tem a forma condicional, cumpre deduzir "p" a partir das premissas $p \vee (q \rightarrow r)$, $\sim r$ e q, isto é, demonstrar a **validade** do argumento

$$p \vee (q \rightarrow r),\ \sim r,\ q \vdash p$$

Temos, sucessivamente:

(1)	$p \vee (q \rightarrow r)$	P	
(2)	$\sim r$	P	
(3)	q	PA	
(4)	$p \vee (\sim q \vee r)$	1	COND
(5)	$(p \vee \sim q) \vee r$	4	ASSOC
(6)	$p \vee \sim q$	2,5	SD
(7)	$\sim\sim q$	3	DN
(8)	p	6,7	SD

(2) Demonstrar a **validade** do argumento

$$\sim p \rightarrow \sim q \vee r,\ s \vee (r \rightarrow t),\ \sim p \vee s,\ \sim s \vdash q \rightarrow t$$

Dem. De conformidade com a Regra DC, cumpre demonstrar a **validade** do argumento

$$p \rightarrow \sim q \vee r,\ s \vee (r \rightarrow t),\ \sim p \vee s,\ \sim s,\ q \vdash t$$

Temos, sucessivamente:

(1)	$p \rightarrow \sim q \vee r$	P	
(2)	$s \vee (r \rightarrow t)$	P	
(3)	$\sim p \vee s$	P	
(4)	$\sim s$	P	
(5)	q	PA	
(6)	$p \rightarrow s$	3	COND
(7)	$\sim p$	4,6	MT
(8)	$\sim q \vee r$	1,7	MP
(9)	$q \rightarrow r$	8	COND
(10)	$r \rightarrow t$	2,4	SD
(11)	$q \rightarrow t$	9,10	SH
(12)	t	5,11	MP

(3) Demonstrar a **validade** do argumento

(1) $(y = 4 \rightarrow x > y) \wedge x > z$
(2) $x > y \vee z > y \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3$
(3) $y = 2 \rightarrow z > y$
$\overline{\quad y = 2 \vee y = 4 \rightarrow y < 4 \vee y > 3 \quad}$

Dem. De conformidade com a Regra DC, cumpre demonstrar a **validade** do argumento

(1) $(y = 4 \rightarrow x > y) \wedge x > z$
(2) $x > y \vee z > y \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3$
(3) $y = 2 \rightarrow z > y$
(4) $y = 2 \vee y = 4$
$\overline{\quad y < 4 \vee y > 3 \quad}$

Temos, sucessivamente:

(1)	$(y = 4 \rightarrow x > y) \wedge x > z$	P	
(2)	$x > y \vee z > y \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3$	P	
(3)	$y = 2 \rightarrow z > y$	P	
(4)	$y = 2 \vee y = 4$	PA	
(5)	$y = 4 \rightarrow x > y$	1	SIMP
(6)	$x > y \vee z > y$	3,4,5	DC
(7)	$y < 4 \wedge y \neq 3$	2,6	MP
(8)	$y < 4$	7	SIMP
(9)	$y < 4 \vee y > 3$	8	AD

(4) Demonstrar a **validade** do argumento

$$p \rightarrow (q \rightarrow r),\ s \vee (r \rightarrow t),\ p \vee s \vdash \sim s \rightarrow (q \rightarrow t)$$

Dem. Consoante a Regra DC, cumpre demonstrar a **validade** do argumento

$$p \rightarrow (q \rightarrow r),\ s \vee (r \rightarrow t),\ p \vee s,\ \sim s \vdash q \rightarrow t$$

Como a conclusão deste argumento também é uma condicional "q → t", fazendo uso novamente da mesma Regra DC, cumpre demonstrar a **validade** do argumento

$$p \rightarrow (q \rightarrow r),\ s \vee (r \rightarrow t),\ p \vee s,\ \sim s,\ q \vdash t$$

Temos sucessivamente

(1)	$\sim p \to (q \to r)$	P	
(2)	$s \vee (r \to t)$	P	
(3)	$p \to s$	P	
(4)	$\sim s$	PA	
(5)	q	PA	
(6)	$\sim p$	3,4	MT
(7)	$q \to r$	1,6	MP
(8)	r	5,7	MP
(9)	$r \to t$	2,4	SD
(10)	t	8,9	MP

(5) Demonstrar a **validade** do argumento

$$p \to q,\quad q \leftrightarrow s,\quad t \vee (r \wedge \sim s) \vdash p \to t$$

Dem. Consoante a Regra DC, cumpre demonstrar a **validade** do argumento

$$p \to q,\quad q \leftrightarrow s,\quad t \vee (r \wedge \sim s),\quad p \vdash t$$

Temos sucessivamente

(1)	$p \to q$	P	
(2)	$q \leftrightarrow s$	P	
(3)	$t \vee (r \wedge \sim s)$	P	
(4)	p	PA	
(5)	q	1,4	MP
(6)	$(q \to s) \wedge (s \to q)$	2	BICOND
(7)	$q \to s$	6	SIMP
(8)	s	5,7	MP
(9)	$(t \vee r) \wedge (t \vee \sim s)$	3	DIST
(10)	$t \vee \sim s$	9	SIMP
(11)	$\sim\sim s$	8	DN
(12)	t	10,11	SD

(6) Demonstrar a **validade** do argumento

$$p \to \sim q,\quad r \to s,\quad (\sim p \wedge t) \vee (r \wedge u) \vdash q \to s$$

Dem. Consoante a Regra DC, cumpre demonstrar a **validade** do argumento

$$\sim p \to \sim q,\quad r \to s,\quad (\sim p \wedge t) \vee (r \wedge u),\quad q \vdash s$$

Temos, sucessivamente

(1)	$\sim p \to \sim q$	P	
(2)	$r \to s$	P	
(3)	$(\sim p \wedge t) \vee (r \wedge u)$	P	
(4)	q	PA	
(5)	$\sim\sim q$	4	DN
(6)	$\sim\sim p$	1,5	MT
(7)	p	6	DN
(8)	$p \vee \sim t$	7	AD
(9)	$\sim\sim p \vee \sim t$	8	DN
(10)	$\sim(\sim p \wedge t)$	9	DM
(11)	$r \wedge u$	3,10	SD
(12)	r	11	SIMP
(13)	s	2,12	MP

3 DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

Um outro método frequentemente **empregado para demonstrar a validade** de um dado argumento

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q \qquad (I)$$

chamado "Demonstração indireta" ou "Demonstração por absurdo" consiste em admitir a **negação** $\sim Q$ da conclusão Q, isto é, supor $\sim Q$ **verdadeira**, e daí **deduzir** logicamente uma **contradição** qualquer C (p. ex., do tipo $A \wedge \sim A$) a partir das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e $\sim Q$. Isto é, demonstrar que é **válido** o argumento

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \sim Q \vdash C$$

Se assim ocorre, então o argumento dado (I) também é **válido**. Com efeito, pela Regra DC (Demonstração condicional), o argumento

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash \sim Q \to C$$

é **válido**. E como temos

$$\sim Q \to C \iff \sim\sim Q \vee C \iff Q \vee C \iff Q$$

segue-se que é **válido** o argumento dado (I).

Em resumo, temos a seguinte Regra DI: Para demonstrar a **validade** do argumento (I) introduz-se $\sim Q$ como "**premissa adicional**" (indicada por PA) e deduz-se uma **contradição** C (p. ex. $A \wedge \sim A$).

4 EXEMPLIFICAÇÃO

(1) Demonstrar a **validade** do argumento

$$p \to \sim q,\quad r \to q \vdash \sim(p \wedge r)$$

Dem. De conformidade com a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas $p \to \sim q$, $r \to q$ e $p \wedge r$. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \to \sim q$	P	
(2)	$r \to q$	P	
(3)	$p \wedge r$	PA	
(4)	p	3	SIMP
(5)	r	3	SIMP
(6)	$\sim q$	1,4	MP
(7)	q	2,5	MP
(8)	$q \wedge \sim q$	6,7	CONJ (Cont.)

(2) Demonstrar a **validade** do argumento

$$\sim p \to q,\quad \sim q \vee r,\quad \sim r \vdash p \vee s$$

Dem. De conformidade com a Regra DI, cumpre deduzir uma **contradição** das premissas $\sim p \to q$, $\sim q \vee r$, $\sim r$ e $\sim(p \vee s)$. Temos, sucessivamente:

(1)	$\sim p \to q$	P	
(2)	$\sim q \vee r$	P	
(3)	$\sim r$	P	
(4)	$\sim(p \vee s)$	PA	
(5)	$\sim p \wedge \sim s$	4	DM
(6)	$\sim p$	5	SIMP
(7)	q	1,6	MP
(8)	$\sim q$	2,3	SD
(9)	$q \wedge \sim q$	7,8	CONJ (Cont.)

(3) Demonstrar a **validade** do argumento

$$p \to q \vee r,\quad \sim r \vdash p \to q$$

Dem. De conformidade com a Regra DC (Demonstração condicional), cumpre demonstrar a **validade** do argumento:

$$p \to q \vee r,\quad \sim r,\quad p \vdash q$$

e, portanto, consoante a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas $p \to q \vee r$, $\sim r$, p e $\sim q$. Temos, sucessivamente:

(1)	$p \to q \vee r$	P	
(2)	$\sim r$	P	
(3)	p	PA	
(4)	$\sim q$	PA	
(5)	$q \vee r$	1,3	MP
(6)	q	2,5	SD
(7)	$q \wedge \sim q$	4,6	CONJ (Cont.)

(4) Demonstrar a **validade** do argumento:

$$\sim p \vee q,\quad \sim q,\quad \sim r \to s,\quad \sim p \to (s \to \sim t) \vdash t \to r$$

Dem. De conformidade com a Regra DC (Demonstração condicional), cumpre demonstrar a **validade** do argumento

$$\sim p \vee q,\quad \sim q,\quad \sim r \to s,\quad \sim p \to (s \to \sim t),\quad t \vdash r$$

e, portanto, consoante a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas $\sim p \vee q$, $\sim q$, $\sim r \to s$, $\sim p \to (s \to \sim t)$, t e $\sim r$. Temos, sucessivamente:

(1)	$\sim p \vee q$	P	
(2)	$\sim q$	P	
(3)	$\sim r \to s$	P	
(4)	$\sim p \to (s \to \sim t)$	P	
(5)	t	PA	
(6)	$\sim r$	PA	
(7)	$\sim p$	1,2	SD
(8)	$s \to \sim t$	4,7	MP
(9)	s	3,6	MP
(10)	$\sim t$	8,9	MP
(11)	$t \wedge \sim t$	5,10	CONJ (Cont.)

(5) Demonstrar a **validade** do argumento

(1) $y \neq 1 \wedge z \neq 1$

(2) $(x < y \wedge x > z) \wedge z = 1 \to x = 0$

(3) $\sim(y = 1 \vee x = 0) \vee (x < y \wedge x > z)$

$x = 0$

Dem. De conformidade com a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma contradição das premissas (1), (2), (3) e $x \neq 0$. Temos, sucessivamente:

(1)	$\sim(y \neq 1 \vee z \neq -1)$	P	
(2)	$(x < y \wedge x > z) \wedge z = -1 \rightarrow x = 0$	P	
(3)	$\sim(y = 1 \vee x = 0) \vee (x < y \wedge x > z)$	P	
(4)	$x \neq 0$	PA	
(5)	$y = 1 \wedge z = -1$	1	DM
(6)	$y = 1$	5	SIMP
(7)	$y = 1 \vee x = 0$	6	AD
(8)	$\sim\sim(y = 1 \vee x = 0)$	7	DN
(9)	$x < y \wedge x > z$	3,8	SD
(10)	$z = -1$	5	SIMP
(11)	$(x < y \wedge x > z) \wedge z = -1$	9,10	CONJ
(12)	$x = 0$	2,11	MP
(13)	$x = 0 \wedge x \neq 0$	4,12	CONJ (Cont)

(6) Demonstrar a validade do argumento

(1) $x = 1 \vee \sim(x + y = y \vee x \ngtr y)$
(2) $x > y \rightarrow x^2 > xy \wedge y = 1$
(3) $x \neq 1$

$\vdash (y = 1 \rightarrow x^2 \ngtr xy)$

Dem. De conformidade com a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas (1), (2), (3) e $y = 1 \rightarrow x^2 \ngtr xy$. Temos, sucessivamente:

(1)	$x = 1 \vee \sim(x + y = y \vee x \ngtr y)$	P	
(2)	$x > y \rightarrow x^2 > xy \wedge y = 1$	P	
(3)	$x \neq 1$	P	
(4)	$y = 1 \rightarrow x^2 \ngtr xy$	PA	
(5)	$\sim(x + y = y \vee x \ngtr y)$	1,3	SD
(6)	$x + y \neq y \wedge x > y$	5	DM
(7)	$x > y$	6	SIMP
(8)	$x^2 > xy \wedge y = 1$	2,7	MP
(9)	$x^2 > xy$	8	SIMP
(10)	$y = 1$	8	SIMP
(11)	$x^2 \ngtr xy$	4,10	MP
(12)	$x^2 > xy \wedge x^2 \ngtr xy$	9,11	CONJ (Cont)

(7) Demonstrar a validade do argumento

(1) $x < y \rightarrow xy = x$
(2) $x \neq y \wedge xy \neq x$
(3) $x \nless y \vee y = 1 \rightarrow x = 2$

$\vdash \sim(x = 2 \leftrightarrow x = y)$

Dem. Consoante a Regra DI (Demonstração indireta), cumpre deduzir uma **contradição** das premissas (1), (2), (3) e $x = 2 \leftrightarrow x = y$. Temos, sucessivamente:

(1)	$x < y \rightarrow xy = x$	P	
(2)	$x \neq y \wedge xy \neq x$	P	
(3)	$x \nless y \vee y = 1 \rightarrow x = 2$	P	
(4)	$x = 2 \leftrightarrow x = y$	PA	
(5)	$x \neq y$	2	SIMP
(6)	$xy \neq x$	2	SIMP
(7)	$x \nless y$	1,6	MT
(8)	$x \nless y \vee y = 1$	7	AD
(9)	$x = 2$	3,8	MP
(10)	$(x = 2 \rightarrow x = y) \wedge (x = y \rightarrow x = 2)$	4	BICOND
(11)	$x = 2 \rightarrow x = y$	10	SIMP
(12)	$x = y$	9,11	MP
(13)	$x = y \wedge x \neq y$	5,12	CONJ (Cont)

EXERCÍCIOS

1. Usar a Regra DC (Demonstração condicional) para mostrar que são válidos os seguintes argumentos:

(a) $\sim r \vee \sim s,\ q \rightarrow s \vdash r \rightarrow \sim q$
(b) $p \rightarrow \sim q,\ \sim(r \wedge \sim p) \vdash q \rightarrow \sim r$
(c) $r \rightarrow t,\ t \rightarrow \sim s,\ (r \rightarrow \sim s) \rightarrow q \vdash p \rightarrow p \wedge q$
(d) $p \rightarrow q,\ r \rightarrow p,\ s \rightarrow r \vdash s \rightarrow q$
(e) $\sim p,\ \sim r \rightarrow q,\ \sim s \rightarrow p \vdash \sim(r \wedge s) \rightarrow q$
(f) $p \rightarrow \sim q,\ \sim r \rightarrow q,\ \sim s \rightarrow \sim q \vdash p \vee \sim s \rightarrow t$
(g) $\sim p \vee \sim s,\ q \rightarrow r,\ t \rightarrow s \wedge r \vdash t \rightarrow \sim(p \vee q)$
(h) $r \rightarrow s,\ s \rightarrow q,\ r \vee (s \wedge p) \vdash \sim q \rightarrow p \wedge s$
(i) $r \vee s,\ \sim t \rightarrow \sim p,\ r \rightarrow \sim q \vdash p \wedge q \rightarrow s \wedge t$
(j) $r \rightarrow p,\ s \rightarrow t,\ t \rightarrow r \vdash s \rightarrow p \vee q$
(k) $q \rightarrow p,\ t \vee s,\ q \vee \sim s \vdash \sim(p \vee r) \rightarrow t$
(l) $p \vee q \rightarrow r,\ s \rightarrow r \wedge \sim t,\ s \vee u \vdash p \rightarrow u$
(m) $p \rightarrow q,\ r \rightarrow t,\ s \rightarrow r,\ p \vee s \vdash \sim q \rightarrow t$

2 Usar a **Regra DC** (Demonstração condicional) para mostrar que são **válidos** os seguintes argumentos:

(a) (1) $x \neq y \to x > y \vee y > x$
(2) $y \neq [illegible] \vee x$ [illegible]
(3) $x > y \vee y > x \to x \neq 2$
[illegible] $\vdash x = y$

(b) (1) $x = 1 \to xy = 2$
(2) $x + y \neq 3 \to x \neq 1$
(3) [illegible] $\vee x = 2 \to (x + y$ [illegible] $3 \wedge xy = 2)$
x [illegible] $\to x \neq 2 \wedge y \neq$ [illegible]

(c) (1) x [illegible] $0 \to x^2$ [illegible] x [illegible] 0
(2) x [illegible] $\to x^2$ [illegible] $x = 0$
(3) x [illegible] $\vee x^2$ [illegible] $x = 1 \to x^3$ [illegible] $3x^2 + 2x$ [illegible] 0
$x = 2 \vee x = 1 \to x^3$ [illegible] $3x^2 + 2x = 0$

3 Usar a **Regra DC** (Demonstração condicional) para mostrar que são **válidos** os seguintes argumentos:

(a) $p \vee q$, $\sim r \vee \sim q \vdash \sim p \to \sim r$
(b) $\sim p \vee$ [illegible] q, $p \vee (r \wedge s) \vdash q \to s$
(c) $p \wedge q \to \sim r \vee$ [illegible] s, $r \wedge s \vdash p \to \sim q$
(d) $p \to q$, $p \vee \sim r$, $\sim s \vee t \to r \vdash \sim s \to q$
(e) $(p \to q) \vee$ [illegible] $s \vee t \to \sim r$ [illegible] $s \vee (t \wedge u) \vdash p \to q$
(f) $(p \to q) \wedge \sim(r \wedge \sim s)$, $s \to t \vee u$, $\sim t \vdash r \to t$
(g) $p \vee$ [illegible] q, q, $r \to s$ [illegible] $p \to t$ [illegible] $s \to t) \vdash \sim t \to r$

4 Usar a **Regra DI** (Demonstração indireta) para mostrar que são **válidos** os seguintes argumentos:

(a) [illegible]$(p \wedge q)$, $p \to r$, $q \vee \sim r \vdash \sim p$
(b) $p \to \sim q$, $r \to \sim p$, $q \vee r \vdash \sim p$
(c) $\sim(p \wedge q)$, $\sim r \to q$, $\sim p \to r \vdash r$
(d) $p \to q \vee r$, $q \to$ [illegible] p, $s \to \sim r \vdash \sim(p \wedge s)$
(e) $p \vee q$, $p \to r$, $q \to s \vdash r \vee s$
(f) $p \vee q$, $s \to$ [illegible] p, [illegible] $(q \vee t) \vdash \sim s$
(g) $p \to \sim q$, $q \vee \sim r$, $\sim(s \vee$ [illegible] $t) \vdash \sim p$
(h) [illegible] $p \to \sim q$, $\sim p \vee r$, $r \to \sim s \vdash \sim q \vee \sim s$
(i) $p \wedge q \leftrightarrow \sim r$, $\sim r \to \sim p$, $\sim q \to \sim r \vdash q$
(j) [illegible] $p \vee$ [illegible] q, $r \vee s \to p$, $q \vee$ [illegible] s, $\sim r \vdash$ [illegible] $(r \vee s)$

(k) $p \vee q \to r$, $\sim r$, $s \to p \vdash$ [illegible] s
(l) $(p \to q) \vee r$, $s \vee t \to \sim r$, $s \vee (t \wedge u) \vdash p \to q$
(m) $p \to q$, $q \vee r \to s$, $\sim s \vdash \sim p$
(n) $(p \to q) \to r$, $r \vee s \to \sim t$, $t \vdash \sim q$

5 Usar a **Regra DI** (Demonstração indireta) para mostrar que são **válidos** os seguintes argumentos:

(a) (1) $2x + 3y$ [illegible] 24
(2) $(x = 6 \to y = 4) \vee 2x = 12$
(3) $(2x =$ [illegible] $2 \to x$ [illegible] $6) \vee 2x + 3y \neq 24$
(4) $x \neq 6$
$2x =$ [illegible] y [illegible] 4

(b) (1) $y =$ [illegible] $\to x$ [illegible] $\vee x > y$
(2) [illegible] $1 \to x$ [illegible] $0 \vee x <$ [illegible]
(3) $x \not> y$
(4) $x \not< z$
(5) $y =$ [illegible] $\vee z =$ [illegible]
x [illegible] 0

6 Usar a **Regra DI** (Demonstração indireta) para mostrar que são **válidos** os seguintes argumentos:

(a) $(p \to q) \vee (r \wedge s)$, $\sim q \vdash p \to s$
(b) $p \to q$, $q \leftrightarrow s$, $t \vee (r \wedge \sim s) \vdash p \to t$
(c) $\sim p \to \sim q \vee r$, $s \vee (r \to t)$, $p \to s$, $\sim s \vdash q \to t$
(d) $\sim(p \to q) \vee (s \to \sim r)$, $q \vee s$, $p \to \sim s \vdash \sim r \vee \sim s$
(e) [illegible]$(p \to q) \wedge (r \to s)$, $p \leftrightarrow t \vee \sim s$, r, $\sim t \vdash q$
(f) $(p \to q) \leftrightarrow (r \wedge s \to t)$, $p \to q \wedge r$, r, $t \vdash \sim s$
(g) $\sim(p \to \sim q) \to (r \leftrightarrow s) \vee t)$, p, q, $\sim t \vdash r \to s$

Capítulo 14

Sentenças Abertas

1. SENTENÇAS ABERTAS COM UMA VARIÁVEL

Definição — Chama-se **sentença aberta com uma variável em um conjunto A** ou apenas **sentença aberta em A**, uma expressão p(x) tal que p(a) é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo $a \in A$.

Em outros termos, p(x) é uma **sentença aberta** em A se e somente se p(x) torna-se uma proposição (falsa ou verdadeira) todas as vezes que se substitui a variável x por qualquer elemento a do conjunto A($a \in A$).

O conjunto A recebe o nome de **conjunto-universo** ou apenas **universo** (ou **domínio**) da variável x e qualquer elemento $a \in A$ diz-se um valor da variável x.

Se $a \in A$ é tal que p(a) é uma proposição verdadeira (V), diz-se que a **satisfaz** ou **verifica** p(x).

Uma sentença aberta com uma variável em A também se chama **função proposicional com uma variável em A** ou simplesmente **função proposicional em A** (ou ainda **condição em A**).

Exemplos — São **sentenças abertas** em N = {1, 2, 3, ..., n, ...} (conjunto dos números naturais) as seguintes expressões:

(a) $x + 1 > 8$ (b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
(c) $x + 5 = 9$ (d) x é divisor de 10
(e) x é primo (f) x é múltiplo de 3

2. CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

Definição — Chama-se **conjunto-verdade** de uma sentença aberta p(x) em um conjunto A, o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que p(a) é uma proposição verdadeira (V).

Este conjunto representa-se por V_p. Portanto, simbolicamente, temos:

$$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x) \text{ é } V\}$$

ou seja, mais simplesmente:

$$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\} \quad \text{ou} \quad V_p = \{x \in A \mid p(x)\}$$

Obviamente, o **conjunto-verdade** V_p de uma sentença aberta p(x) em A é sempre um **subconjunto** do conjunto A($V_p \subset A$).

Exemplos:

(1) Seja a sentença aberta "$x + 1 > 8$" em N (conjunto dos números naturais). O conjunto-verdade é:

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 1 > 8\} = \{8, 9, 10, \ldots\} \subset N$$

(2) Para a sentença aberta "$x + 7 < 5$" em N, o **conjunto-verdade** é:

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 7 < 5\} = \phi \subset N$$

(3) O **conjunto-verdade** em N da sentença aberta "$x + 5 > 3$" é:

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 5 > 3\} = N \subset N$$

(4) Para a sentença aberta "x é divisor de 10" em N, temos:

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x \text{ é divisor de } 10\} = \{1, 2, 5, 10\} \subset N$$

(5) O **conjunto-verdade** da sentença aberta "$x^2 - 2x > 0$" em Z (conjunto dos números inteiros) é:

$$V_p = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 - 2x > 0\} = Z - \{0, 1, 2\}$$

NOTA — Mostram os exemplos anteriores que, se p(x) é uma sentença aberta em um conjunto A, três casos podem ocorrer:

(1) p(x) é verdadeira (V) **para todo** $x \in A$, isto é, o conjunto-verdade V_p coincide com o universo A da variável x($V_p = A$).
Diz-se, neste caso, que p(x) exprime uma **condição universal** (ou uma **propriedade universal**) no conjunto A.

(2) p(x) é verdadeira (V) somente para **alguns** $x \in A$, isto é, o conjunto-verdade V_p é um subconjunto próprio do universo A da variável x ($V_p \subset A$).
Neste caso, diz-se que p(x) exprime uma **condição possível** (ou uma **propriedade possível**) no conjunto A.

(3) p(x) não é verdadeira (F) para **nenhum** $x \in A$, isto é, o conjunto-verdade V_p é vazio ($V_p = \emptyset$).
Diz-se, neste caso, que p(x) exprime uma **condição impossível** (ou uma **propriedade impossível**) no conjunto A.
No universo R (conjunto dos números reais), as condições

$$x + 1 > x \qquad \text{e} \qquad x + 1 = x$$

são **universal** a primeira (visto ser verificada **por todos os números reais**) e **impossível** a segunda (visto não ser verificada **por nenhum número real**).

No mesmo universo R a condição $9x^2 - 1 = 0$ é **possível**, visto ser verificada somente pelos números reais $1/3$ e $-1/3$. Pelo contrário, no universo N (conjunto dos números naturais) a mesma condição $9x^2 - 1 = 0$ é **impossível**, pois, não existe **nenhum** número natural que verifique tal condição. Por sua vez, a condição $3x > x$ é **universal** em N (o triplo de um número natural é **sempre** maior que ele), mas **não é universal** em R (não é verificada para $x = -1, 3$ ou para $x = -3$).

Conclui-se, através destes exemplos, o emprego dos adjetivos "universal", "possível" e "impossível" depende geralmente do universo adotado. Note-se, porém, que a condição $x = x$ é **universal**, e por conseguinte a condição $x \neq x$ é **impossível**, qualquer que seja o universo considerado, por virtude do AXIOMA LÓGICO DA IDENTIDADE: **Todo o ente é idêntico a si mesmo**, isto é, simbolicamente:

$$a = a, \text{ qualquer que seja o ente } a$$

Entende-se por **ente** (ser ou **entidade**) a tudo aquilo que se considera como existente e a que, por isso, se pode dar um nome.

3 SENTENÇAS ABERTAS COM DUAS VARIÁVEIS

Definição Dados dois conjuntos A e B, chama-se **sentença aberta com duas variáveis em A x B** ou apenas **sentença aberta em A x B**, uma expressão p(x, y) tal que p(a, b) é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo o par ordenado $(a, b) \in A \times B$.

Em outros termos, p(x, y) é uma **sentença aberta** em A x B se e somente se p(x, y) torna-se uma proposição (falsa ou verdadeira) todas as vezes que as variáveis x e y são substituídas respectivamente pelos elementos a e b de qualquer par ordenado (a, b) pertencente ao **produto cartesiano** A x B dos conjuntos A e B ($(a, b) \in A \times B$).

O conjunto A x B recebe o nome de **conjunto-universo** ou apenas **universo** (ou ainda **domínio**) das variáveis x e y, e qualquer elemento (a, b) de A x B diz-se um **par de valores das variáveis** x e y.

Se $(a, b) \in A \times B$ é tal que p(a, b) é uma proposição verdadeira (V), diz-se que (a, b) **satisfaz** ou **verifica** p(x, y).

Uma sentença aberta com duas variáveis em A x B também se chama **função proposicional com duas variáveis em A x B** ou simplesmente **função proposicional** em A x B (ou ainda **condição** em A x B).

Exemplos Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {5, 6}. São sentenças abertas em A x B as seguintes expressões

(a) x é menor que y ($x < y$)
(b) x é divisor de y ($x \mid y$)
(c) y é o dobro de x ($y = 2x$)
(d) m.d.c. (x, y) = 1

O par ordenado $(3, 5) \in A \times B$, p. ex., **satisfaz** (a) e (d), pois, $3 < 5$ e o m.d.c.(3, 5) = 1, e o par ordenado $(3, 6) \in A \times B$, p. ex., **satisfaz** (b) e (c), pois, $3 \mid 6$ e $6 = 2 \cdot 3$.

4 CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM DUAS VARIÁVEIS

Definição Chama-se **conjunto-verdade** de uma sentença aberta p(x, y) em A x B, o conjunto de todos os elementos $(a, b) \in A \times B$ tais que p(a, b) é uma proposição verdadeira (V).

Este conjunto representa-se por V_p. Portanto, simbolicamente, temos:

$$V_p = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge p(x, y)\}$$

ou seja, mais simplesmente

$$V_p = \{(x, y) \in A \times B \mid p(x, y)\}$$

O **conjunto-verdade** V_p de uma sentença aberta p(x, y) em **A x B** é sempre um **subconjunto** do conjunto A x B ($V_p \subset A \times B$).

Exemplos:

(1) Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5}. O **conjunto-verdade** da sentença aberta "$x < y$" em A x B é

$$V_p = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x < y\}$$
$$= \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} \subset A \times B$$

(2) Sejam os conjuntos A = {2, 3, 4, 5} e B = {3, 6, 7, 10}. O **conjunto-verdade** da sentença aberta "x divide y" (x | y) em A x B é:

V_p = {(x, y) | x ∈ A ∧ y ∈ B ∧ x | y} =

= {(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)} ⊂ A x B

(3) Sejam os conjuntos A = {[illegible]} e B = {3, 4}. O **conjunto-verdade** da sentença aberta [illegible] em A x B é:

V_p = {(x, y) | x ∈ A ∧ y ∈ B ∧ [illegible]} =

= {[illegible]} ⊂ A x B

(4) Sejam os conjuntos A = {2, 3, 4} e B = {[illegible] 6}. O **conjunto-verdade** da sentença aberta "mdc(x, y) = 2" em A x B é:

V_p = {(x, y) | x ∈ A ∧ y ∈ B ∧ mdc (x, y) = 2} =

= {(2, 2), (2, 6), (4, 2), (4, 6)} ⊂ A x B

(5) O **conjunto-verdade** da sentença aberta "2x + y = 10" em N x N, sendo N o conjunto dos números naturais, é:

V_p = {(x, y) | x, y ∈ N ∧ 2x + y = 10} =

= {(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)} ⊂ N x N

(6) O **conjunto-verdade** da sentença aberta "$x^2 + y^2 = 1$" em Z x Z, sendo Z o conjunto dos números inteiros, é:

V_p = {(x, y) | x, y ∈ Z ∧ $x^2 + y^2$ = 1} =

= {(0, 1), (1, 0), (−1, 0), (0, −1)} ⊂ Z x Z

5. SENTENÇAS ABERTAS COM N VARIÁVEIS

Consideremos os n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e o seu **produto cartesiano** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Definição – Chama-se **sentença aberta com n variáveis em** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ou apenas **sentença aberta em** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, uma expressão $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é falsa (F) ou verdadeira (V) para toda n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

O conjunto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ recebe o nome de **conjunto-universo** ou apenas **universo** (ou ainda **domínio**) das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e qualquer elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ diz-se uma **n-upla de valores das variáveis** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é tal que $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma proposição verdadeira (V), diz-se que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **satisfaz** ou **verifica** $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Uma sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ também se chama **função proposicional com n variáveis em** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ou simplesmente **função proposicional em** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ (ou ainda **condição em** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$).

Exemplo – A expressão "x + 2y + 3z < 18" é uma **sentença aberta** em N x N x N, sendo N o conjunto dos números naturais.

O terno ordenado (1, 2, 4) ∈ N x N x N, p. ex., satisfaz esta sentença aberta, pois, 1 + 2 · 2 + 3 · 4 < 18.

6. CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM N VARIÁVEIS

Definição – Chama-se **conjunto-verdade** de uma sentença aberta $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, o conjunto de todas as n-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ tais que $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é **uma proposição verdadeira (V)**.

Portanto, simbolicamente, temos:

$$V_p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \wedge p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

ou seja, mais simplesmente:

$$V_p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \mid p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

Exemplo – O **conjunto-verdade** da sentença aberta "18x − 7y + 13z = 39" em Z x Z x Z, sendo Z o conjunto dos números inteiros, é:

V_p = {(x, y, z) | x, y, z ∈ Z ∧ 18x − 7y + 13z = 39} =

= {(1, 3, 0), (4, [illegible] 2), (3, 4, 1), (6, 8, 1), ...}

NOTA – Em Matemática, as **equações** e as **inequações** são sentenças abertas que exprimem **relação de igualdade** e **desigualdade**, respectivamente, entre duas expressões com variáveis. Mas, o conceito de sentença aberta é muito mais amplo que o de equação ou inequação, assim, "x divide y", "x é primo com y", "x é filho de y", etc., são sentenças abertas, sem serem equações nem inequações.

Capítulo 15

Operações Lógicas sobre Sentenças Abertas

1. As operações lógicas que definimos para proposições (Cap. 2) estendem-se naturalmente às sentenças abertas.

2. CONJUNÇÃO

Consideremos, p. ex., as sentenças abertas.

"x é medico", "x é professor"

o universo da variável x em cada uma delas sendo o conjunto H dos seres humanos.

Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo "∧" (que se lê "e"), obtemos uma nova sentença aberta em H

"x é medico ∧ x é professor"

que é **verificada** por todos os indivíduos que satisfazem ao mesmo tempo as **duas** condições dadas, e só por esses indivíduos. Logo, é natural chamar a nova sentença aberta assim obtida **conjunção das duas primeiras**.

Analogamente, a **conjunção** das sentenças abertas em R (conjunto dos números reais)

"$x > 2$" "$x < 8$"

é a sentença aberta em R

"$x > 2 \wedge x < 8$"

Assim, fazendo $x = 5$, $x = \pi$, $x = 2$, [illegible] teremos sucessivamente

x	$x > 2$	$x < 8$	$x > 2 \wedge x < 8$
7	V	V	V
π	V	V	V
[illegible]	F	V	F
[illegible]	F	V	F
8,5[illegible]	V	F	F

Note-se que a conjunção $x > 2 \wedge x < 8$ costuma ser escrita $2 < x < 8$. A [illegible] a e b [illegible] escreve-se **por definição**

$a < x < b \Leftrightarrow x > a$ [illegible] x [illegible] b

ou

[illegible] $b] \Leftrightarrow x$ [illegible] a [illegible] $x < b$

Outros exemplos

(1) No universo N (conjunto dos numeros naturais)

3 [illegible] x [illegible] 5 [illegible] x [illegible] 5 [illegible] x

x [illegible] $y \wedge y$ [illegible] $x \Longleftrightarrow x = y$

(2) No universo R (conjunto dos números reais)

$2x + y = 8 \wedge$ [illegible] $\Leftrightarrow x = 3 \wedge y = 2$

o que também se pode escrever

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ [\text{illegible}] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

(3) No universo das figuras geométricas

x é um retangulo ∧ x é um losango ⟺ x é um quadrado

De modo geral, sejam $p(x)$ e $q(x)$ sentenças abertas em um conjunto A. É óbvio que um elemento $a \in A$ satisfaz a sentença aberta $p(x) \wedge q(x)$ em A se a proposição $p(a) \wedge q(a)$ é verdadeira (V). Ora, esta proposição é verdadeira se e somente se as proposições $p(a)$ e $q(a)$ são ambas verdadeiras, isto é, se e somente se $a \in A$ satisfaz ao mesmo tempo as sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A. Portanto, o **conjunto-verdade** $V_{p \wedge q}$ da sentença aberta $p(x) \wedge q(x)$ em A é a **interseção** ($\cap$) dos conjuntos-verdade V_p e V_q das sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A. Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{p \wedge q} = V_p \cap V_q = \{x \in A \mid p(x)\} \cap \{x \in A \mid q(x)\}$$

Exemplificando, sejam as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

$p(x): x^2 + x - 2 = 0$

$q(x): x^2 - 4 = 0$

Temos:

$$V_{p \wedge q} = \{x \in Z \mid x^2 + x - 2 = 0\} \cap \{x \in Z \mid x^2 - 4 = 0\} =$$

$$= \{-2, 1\} \cap \{-2, 2\} = \{-2\}$$

3. DISJUNÇÃO

Consideremos ainda as sentenças abertas em H (conjunto dos seres humanos):

"x é médico", "x é professor"

Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo $\vee$ (que se lê "ou"), obtemos uma nova sentença aberta em H:

"x é médico $\vee$ x é professor"

que é verificada por todo indivíduo que satisfaz **uma pelo menos** das duas condições dadas e só por esses indivíduos. Logo, é natural chamar a nova sentença aberta assim obtida **disjunção** das duas primeiras.

Analogamente, a **disjunção** das sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

"x < 2", "x > 8"

é a sentença aberta em R:

$x < 2 \vee x > 8$

Assim, para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$, $x = \pi$, $x = 8{,}57$ obtemos, sucessivamente:

x	x < 2	x > 8	x < 2 ∨ x > 8
0	V	F	V
1	V	F	V
2	F	F	F
5	F	F	F
π	F	F	F
8,57	F	V	V

Outros exemplos:

(1) No universo N (conjunto dos números naturais):

$\{x \mid x \text{ divide } 6\} \cup \{x \mid x \text{ divide } 10\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$

(2) No universo R (conjunto dos números reais):

$x = 2 \vee x = 3 \iff x^2 - 5x + 6 = 0$

$x > 5 \vee x = 5 \iff x \geq 5$

Assim, sendo a e b números reais quaisquer, escreve-se, **por definição**:

$$a \leq b \iff a < b \vee a = b$$

Também se escreve, **por definição**:

$$a \leq b \leq c \iff a \leq b \wedge b \leq c$$

ou seja:

$$a \leq b \leq c \iff (a < b \vee a = b) \wedge (b < c \vee b = c)$$

Análogos significados têm:

$a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a > b > c$, etc.

De modo geral, sejam $p(x)$ e $q(x)$ sentenças abertas em um conjunto A. É imediato que um elemento $a \in A$ satisfaz a sentença aberta $p(x) \vee q(x)$ em A se a proposição $p(a) \vee q(a)$ é verdadeira (V). Ora, esta proposição é verdadeira se e somente se **uma pelo menos** das proposições $p(a)$ e $q(a)$ é verdadeira, isto é, se e somente se $a \in A$ **satisfaz uma pelo menos** das sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A. Portanto, o **conjunto-verdade** $V_{p \vee q}$ da sentença aberta $p(x) \vee q(x)$ em A é a

reunião ($\cup$) dos conjuntos-verdade V_p e V_q das sentenças abertas p(x) e q(x) em A. Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{p \vee q} = V_p \cup V_q = \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}$$

Exemplificando, sejam as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

$p(x): x^2 + x - 2 = 0$

$q(x): x^2 - 4 = 0$

Temos:

$$V_{p \vee q} = \{x \in Z \mid x^2 + x - 2 = 0\} \cup \{x \in Z \mid x^2 - 4 = 0\} =$$

Para as sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

$p(x): x < 0$ $\quad$ $q(x): x > 0$

temos:

$$V_{p \vee q} = \{x \in R \mid x < 0\} \cup \{x \in R \mid x > 0\} = R^*_- \cup R^*_+ = R^*$$

4 NEGAÇÃO

Consideremos no universo H dos seres humanos a sentença aberta:

"x tem menos de 21 anos"

Antepondo a esta sentença aberta o conectivo ~ (que se lê "não é verdade que"), obtemos a nova sentença aberta em H:

"~x tem menos de 21 anos"

que é natural chamar **negação** da primeira, pois, é **verificada** precisamente pelos indivíduos que **não satisfazem** aquela.

Obviamente, a negação de "x tem menos de 21 anos" é logicamente equivalente à seguinte sentença aberta em H:

"x tem 21 anos $\vee$ x tem mais de 21 anos"

Outros exemplos:

(1) No universo N (conjunto dos números naturais)

$$\sim x \text{ é par} \Longleftrightarrow x \text{ é ímpar}$$

(2) No universo R (conjunto dos números reais)

$$\sim(x < y) \Longleftrightarrow x \geqslant y$$

ou seja:

$$\sim(x < y) \Longleftrightarrow x = y \vee x > y$$

Por sua vez:

$$\sim(x = y) \Longleftrightarrow x < y \vee x > y$$

(3) Em qualquer universo U

$$\sim(x = y) \Longleftrightarrow x \neq y$$

De modo geral, seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto A. É óbvio que um elemento a ∈ A **satisfaz** a sentença aberta ~p(x) em A se a proposição ~p(a) é verdadeira (V). Ora, esta proposição é verdadeira se e somente se a proposição p(a) é falsa (F), isto é, se e somente se a ∈ A **não satisfaz** a sentença aberta p(x) em A. Portanto, o **conjunto-verdade** $V_{\sim p}$ da sentença aberta ~p(x) em A é o **complemento em relação a A** do conjunto-verdade V_p da sentença aberta p(x) em A. Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{\sim p} = C_A V_p = C_A \{x \in A \mid p(x)\}$$

Exemplificando, seja A o conjunto dos números naturais divisíveis por 5, isto é: A = {5, 10, 15, 20, ...}. Para a sentença aberta em A:

$$p(x): x \text{ é um número par}$$

temos:

$$V_{\sim p} = C_A \{x \in A \mid x \text{ é um número par}\}$$
$$= \{x \in A \mid x \text{ não é divisível por } 10\}$$

5 CONDICIONAL

Consideremos as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

"$x^2 - 5x + 6 = 0$" $\quad$ e $\quad$ "$x^2 - 9 = 0$"

Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo → (que se lê "se ... então ..."), obtemos uma nova sentença aberta em Z:

"$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0$"

denominada **condicional** das duas primeiras, é **verificada** por todo número inteiro diferente de 2 (para x = 2 a condicional é falsa (F) porque o antecedente é verdadeiro (V) e o consequente é falso (F)).

De modo geral, sejam p(x) e q(x) sentenças abertas em um mesmo conjunto A. Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo →, obtemos uma nova sentença aberta em A: "p(x) → q(x)", que é **verificada** por todo elemento a ∈ A tal que a condicional "p(a) → q(a)" é verdadeira (V).

Por ser p(x) → q(x) ⟺ ~p(x) ∨ q(x), segue-se que o **conjunto-verdade** $V_{p \to q}$ da sentença aberta p(x) → q(x) em A **coincide** com o conjunto-verdade da sentença aberta ~p(x) ∨ q(x) em A e, portanto, é a **reunião** (∪) dos conjuntos-verdade $V_{\sim p}$ e V_q das sentenças abertas ~p(x) e q(x) em A. Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{p \to q} = V_{\sim p} \cup V_q = C_A V_p \cup V_q$$

ou seja:

$$V_{p \to q} = C_A \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}$$

Exemplificando, sejam as sentenças abertas em N (conjunto dos números naturais):

$$p(x): x \mid 12, \qquad q(x): x \mid 45$$

Temos:

$$V_{p \to q} = C_N \{x \in N \mid x \mid 12\} \cup \{x \in N \mid x \mid 45\} =$$
$$= C_N \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} =$$
$$= N - \{2, 4, 6, 12\}$$

6. BICONDICIONAL

Consideremos as sentenças abertas em Z (conjunto dos números inteiros):

"x > −5", "x < 0"

Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo ↔ (que se lê: "se e somente se") obtemos uma nova sentença aberta em Z:

"x > −5 ⟷ x < 0"

denominada **bicondicional** das duas primeiras, e que é **verificada** por todo número inteiro maior que −5 e menor que 0, isto é, para x = −4, −3, −2, −1 e somente por esses números.

De modo geral, sejam p(x) e q(x) sentenças abertas em um mesmo conjunto A. Ligando estas duas sentenças abertas pelo conectivo ⟷, obtemos uma nova sen-

tença aberta em A: "p(x) ⟷ q(x)", que é **verificada** por todo elemento a ∈ A tal que a bicondicional "p(a) ⟷ q(a)" é verdadeira (V).

Por ser p(x) ⟷ q(x) ⟺ (p(x) → q(x)) ∧ (q(x) → p(x)), segue-se que o **conjunto-verdade** $V_{p \leftrightarrow q}$ da sentença aberta p(x) ⟷ q(x) em A **coincide** com o conjunto-verdade da sentença aberta em A:

$$(p(x) \to q(x)) \wedge (q(x) \to p(x))$$

e, portanto, é a **interseção** (∩) dos conjuntos-verdade $V_{p \to q}$ e $V_{q \to p}$ das sentenças abertas em A: p(x) → q(x) e q(x) → p(x). Temos, pois, simbolicamente:

$$V_{p \leftrightarrow q} = V_{p \to q} \cap V_{q \to p} = (V_{\sim p} \cup V_q) \cap (V_{\sim q} \cup V_p) =$$
$$= (C_A V_p \cup V_q) \cap (C_A V_q \cup V_p)$$

ou seja:

$$V_{p \leftrightarrow q} = (C_A \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}) \cap$$
$$\cap (C_A \{x \in A \mid q(x)\} \cup \{x \in A \mid p(x)\})$$

Exemplificando, sejam as sentenças abertas em N (conjunto dos números naturais):

$$p(x): x \mid 6 \qquad q(x): x \mid 15$$

Temos:

$$C_N V_p \cup V_q = C_N \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 3, 5, 15\} = N - \{2, 6\}$$
$$C_N V_q \cup V_p = C_N \{1, 3, 5, 15\} \cup \{1, 2, 3, 6\} = N - \{5, 15\}$$

e, portanto:

$$V_{p \leftrightarrow q} = (N - \{2, 6\}) \cap (N - \{5, 15\}) = N - \{2, 5, 6, 15\}$$

7. ÁLGEBRA DAS SENTENÇAS ABERTAS

As propriedades das operações lógicas sobre proposições (Cap. 7) se transmitem automaticamente às operações lógicas sobre sentenças abertas em um mesmo conjunto, que vimos há pouco definir. Assim, a **conjunção** e a **disjunção** continuam a ser **comutativas** e **associativas**, e cada uma delas é **distributiva** em relação à outra. Subsiste a **propriedade da dupla negação**, assim como as **leis de DE MORGAN**. Quanto às **propriedades de identidade**:

$$p \wedge t \iff p, \quad p \wedge c \iff c, \quad p \vee t \iff t, \quad p \vee c \iff p$$

assumem agora novo aspecto. Assim, temos:

(I) A conjunção de uma sentença aberta com uma outra que exprime uma condição universal é equivalente à primeira.

(II) A conjunção de uma sentença aberta com uma outra que exprime uma condição impossível exprime uma condição impossível.

Das duas propriedades precedentes resultam outras duas, obtidas por **dualidade lógica**, substituindo conjunção por disjunção, e vice-versa, e "universal" por "impossível" e "impossível" por "universal".

Consideremos, p. ex., em R (conjunto dos números reais) os sistemas

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 1 > x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 1 = x \end{cases}$$

que se podem escrever, respectivamente:

$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 > x \qquad 2x - 1 > 3 \wedge x + 1 = x$$

Como a sentença aberta $x + 1 > x$ exprime uma **condição universal** e a sentença aberta $x + 1 = x$ exprime uma **condição impossível**, teremos:

$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 > x \iff 2x - 1 > 3$$

$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 = x \iff x + 1 = x \text{ (impossível)}$$

Analogamente:

$$2x - 1 > 3 \vee x + 1 > x \iff x + 1 > x \text{ (universal)}$$

$$2x - 1 > 3 \vee x + 1 = x \iff 2x - 1 > 3$$

CONVENÇÃO – Dadas várias sentenças abertas $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, ..., escrevemos

$$p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x) \text{ em lugar de } (p_1(x) \wedge p_2(x)) \wedge p_3(x)$$

$p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x) \wedge p_4(x)$ em lugar de $((p_1(x) \wedge p_2(x)) \wedge p_3(x)) \wedge p_4(x)$ etc.

E analogamente para a disjunção.

EXERCÍCIOS

1. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:
   (a) $x < 7 \wedge x$ é ímpar (b) x é par $\wedge x + 2 \leq 10$
   (c) $3 \mid x \wedge x < 8$ (d) $(x + 4) \in A \wedge (x^2 - 5) \notin A$

2. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:
   (a) $x^2 - 3x = 0 \vee x^2 = x$ (b) x é par $\vee x^2 < 9$
   (c) x é primo $\vee (x + 5) \in A$ (d) $x^2 \geq 16 \vee x^2 - 6x + 5 = 0$

3. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:
   (a) $\sim(x \leq 3)$ (b) $\sim(x$ é ímpar$)$
   (c) $\sim(x \mid 12)$ (d) $\sim(x + 1) \in A$
   (e) $\sim(x$ é primo$)$ (f) $\sim(x^2 - 3x = 0)$

4. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:
   (a) x é par $\rightarrow x^2 - 1 = 0$ (b) $x \mid 12 \rightarrow x$ é primo
   (c) [illegible] (d) [illegible]
   (e) $x^2 + x - 6 < 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0$

5. Determinar o **conjunto-verdade** em $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:
   (a) [illegible] (b) [illegible]
   (c) x é primo $\longleftrightarrow (x + 3) \notin A$ (d) $x^2 > 12 \longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

6. Sejam as sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

   $p(x): 2x - 3 \leq 0$ e $q(x): x + 1 \geq 0$

   Determinar $V_{p \wedge q}$ e $V_{p \vee q}$

7. Sejam as sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

   $p(x)$: [illegible] $q(x)$: [illegible]

   Determinar $V_{p \vee q}$ e $V_{p \wedge q}$

8. Sejam as sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

   $p(x): 4x + 3 \geq 0$ e $q(x): 5x + 2 > 0$

   Determinar $V_{p \wedge q}$ e $V_{\sim p}$

9. Sejam as sentenças abertas em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

   $p(x): x^2 \in A$ e $q(x): x$ é ímpar

   Determinar $V_{p \rightarrow q}$, $V_{q \rightarrow p}$ e $V_{p \longleftrightarrow q}$

0 Sejam p(x), q(x) e r(x) sentenças abertas em um mesmo conjunto A. Exprimir o conjunto-verdade da sentença aberta composta

$$p(x) \rightarrow q(x) \vee [illegible] r(x)$$

em função de V_p, V_q e V_r.

Resolução Temos sucessivamente:

$V_{p \rightarrow q \vee}$ [illegible] $(C_A V_p) \cup V_{q \vee}$ [illegible] $C_A V_p \cup (V_q$ [illegible] $) = (C_A V_p) \cup (V_q$ [illegible] $C_A V_r)$

1 Sejam p(x), q(x) e r(x) sentenças abertas em um mesmo conjunto A. Achar a expressão do conjunto-verdade de cada uma das sentenças abertas compostas abaixo em função de V_p, V_q e V_r:

(a) $\sim(p(x) \vee q(x))$ (b) $p(x) \rightarrow \sim q(x)$
(c) $p(x) \rightarrow (\sim r(x) \rightarrow q(x))$ (d) $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x))$

Capítulo 16

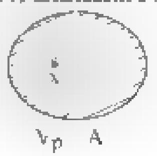
Quantificadores

1 QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto não vazio $A (A \neq \phi)$ e seja V_p o seu conjunto-verdade:

$$V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$$

Quando $V_p = A$, isto é, todos os elementos do conjunto A satisfazem a sentença aberta p(x), podemos, então, afirmar:



(i) "Para todo elemento x de A, p(x) é verdadeira (V)"
(ii) "Qualquer que seja o elemento x de A, p(x) é verdadeira (V)"

ou seja, mais simplesmente:

(iii) "Para todo x de A, p(x)"
(iv) "Qualquer que seja x de A, p(x)"

Pois bem, no simbolismo da Lógica Matemática indica-se este fato abreviadamente, de uma das seguintes maneiras:

(1) $(\forall x \in A) (p(x))$
(2) $\forall x \in A, p(x)$
(3) $\forall x \in A : p(x)$

Muitas vezes, para simplificar a notação, omite-se a indicação do domínio A da variável x, escrevendo mais simplesmente:

(4) $(\forall x) (p(x))$
(5) $\forall x, p(x)$
(6) $\forall x : p(x)$

Subsiste, pois, a equivalência

$$(\forall x \in A)(p(x)) \Leftrightarrow V_p = A$$

Importa notar que p(x) simplesmente é uma sentença aberta, e por conseguinte carece de valor lógico V ou F; mas, a sentença aberta p(x) com o símbolo ∀ antes dela, isto é, (∀ x ∈ A)(p(x)), torna-se uma **proposição** e, portanto, tem um valor lógico, que é a **verdade** (V) se $V_p = A$ e a **falsidade** (F) se $V_p \neq A$.

Em outros termos, dada uma sentença aberta p(x) em um conjunto A, o símbolo ∀, referido à variável x, representa uma **operação lógica que transforma a sentença aberta p(x) numa proposição**, verdadeira ou falsa, conforme p(x) exprime ou não uma **condição universal** no conjunto A. A esta operação lógica dá-se o nome de **quantificação universal** e ao respectivo símbolo ∀ (que é um A invertido) o de **quantificador universal**.

Quando, em particular, A seja um conjunto finito com n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, isto é, A = {$a_1, a_2, \ldots, a_n$}, é óbvio que a proposição (∀ x ∈ A)(p(x)) é equivalente à conjunção das n proposições $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n)$, ou seja, simbolicamente:

$$(\forall x \in A)(p(x)) \Longleftrightarrow (p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \ldots \wedge p(a_n))$$

Portanto, num universo finito, o quantificador universal equivale a conjunções sucessivas. Assim, p. ex., no universo finito A = {3, 5, 7} e sendo p(x) a sentença aberta "x é primo", temos

$$(\forall x \in A)(x \text{ é primo}) \Leftrightarrow (3 \text{ é primo} \wedge 5 \text{ é primo} \wedge 7 \text{ é primo})$$

Exemplificando, a expressão

$$(\forall x)(x \text{ é mortal})$$

lê-se "Qualquer que seja x, x é mortal", o que é uma proposição verdadeira (V) no universo H dos seres humanos ou, mais geralmente, no universo dos seres vivos.

Se a variável da sentença aberta for uma outra, em vez da letra x, escreve-se o quantificador universal ∀ seguido dessa variável. Assim, a expressão

$$(\forall \text{ Fulano})(\text{Fulano é mortal})$$

lê-se "Qualquer que seja Fulano, Fulano é mortal", o que significa **exatamente o** mesmo que a proposição anterior.

Analogamente, as expressões

(∀ x) (2x > x) "Qualquer que seja x, 2x > x"
(∀ y) (2y > y) "Qualquer que seja y, 2y > y"

exprimem ambas o mesmo fato: **"O dobro de um número é sempre maior que esse número"**, o que é verdadeiro em N, mas falso em R (p. ex., 2 · 0 = 0, 2 · (−3) < −3, etc.)

Muitas vezes (quando não há perigo de dúvida), o quantificador é escrito depois e não antes da expressão quantificada. Por exemplo, tem-se em R:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2), \ \forall x$$

Aqui, o símbolo ∀ x pode lêr-se "qualquer que seja x" ou "para todo o valor de x" ou simplesmente "para todo o x".

Algumas vezes, para evitar possíveis dúvidas, o domínio da variável é devidamente especificado. Assim,

$$x + 1 > x, \quad \forall x \in R$$

Aqui, "∀ x ∈ R" lê-se "qualquer que seja x ∈ R" ou ainda "para todo x ∈ R".

Outras vezes ainda, para condensar a escrita, escreve-se a variável com o índice do símbolo ∀. Assim, p. ex.:

$$\underset{x>0}{\forall} \ 2x > x \text{ ("Para todo o x > 0, tem-se 2x > x")}$$

$$\underset{x\neq 0}{\forall} \ x^2 > 0 \text{ ("Para todo o x} \neq 0\text{, tem-se } x^2 > 0\text{")}$$

Outros exemplos:

(1) A proposição

$$(\forall n \in N)(n + 5 > 3)$$

é verdadeira, pois o conjunto-verdade da sentença aberta p(n): n + 5 > 3 é

$$V_p = \{n \mid n \in N \wedge n + 5 > 3\} = \{1, 2, 3, \ldots\} = N$$

(2) A proposição

$$(\forall n \in N)(n + 3 > 7)$$

é falsa, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta p(n): n + 3 > 7 é

$$V_p = \{n \mid n \in N \wedge n + 3 > 7\} = \{5, 6, 7, \ldots\} \neq N$$

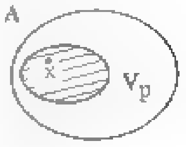
(3) Obviamente, a proposição (∀ x ∈ R)($x^2 \geq 0$) é verdadeira e a proposição (∀ x ∈ R)(3x − 5 = 0) é falsa.

2. QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto não vazio $A (A \neq \phi)$ e seja V_p o seu conjunto-verdade

$$V_p = \{x \mid x \in A \land p(x)\}$$

Quando V_p não é vazio ($V_p \neq \phi$), então, um elemento, pelo menos, do conjunto A satisfaz a sentença aberta p(x), e podemos afirmar



(i) "Existe pelo menos um $x \in A$ tal que p(x) é verdadeira (V)"
(ii) "Para algum $x \in A$, p(x) é verdadeira (V)"

ou seja, mais simplesmente

(iii) "Existe $x \in A$ tal que p(x)"
(iv) "Para algum $x \in A$, p(x)"

Pois bem, no simbolismo da Lógica Matemática indica-se este fato abreviadamente, de uma das seguintes maneiras

(1) $(\exists x \in A)(p(x))$
(2) $\exists x \in A,\ p(x)$
(3) $\exists x \in A \,.\, p(x)$

Muitas vezes, para simplificar a notação omite-se a indicação do domínio A da variável x, escrevendo mais simplesmente

(4) $(\exists x)(p(x))$
(5) $\exists x,\ p(x)$
(6) $\exists x\ \ p(x)$

Subsiste, pois, a equivalência

$$(\exists x \in A)(p(x)) \Longleftrightarrow V_p \neq \phi$$

Cumpre notar que, sendo p(x) uma sentença aberta, carece de valor lógico V ou F, mas a sentença aberta p(x) com o símbolo $\exists$ antes dela, isto é, $(\exists x \in A)(p(x))$, torna-se uma **proposição** e, portanto, tem um valor lógico, que é a **verdade** (V) se $V_p \neq \phi$ e a **falsidade** (F) se $V_p = \phi$.

Deste modo, dada uma sentença aberta p(x) em um conjunto A, o símbolo $\exists$, referido à variável x, representa uma **operação lógica** que **transforma a sentença aberta p(x) numa proposição**, verdadeira ou falsa, conforme p(x) exprime ou não **uma condição possível** no conjunto A. A esta operação lógica dá-se o nome de **quantificação existencial** e ao respectivo símbolo $\exists$ (que é um E invertido) o de **quantificador existencial**.

Quando, em particular, A seja um conjunto finito com n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, isto é, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, é óbvio que a proposição $(\exists x \in A)(p(x))$ é **equivalente à disjunção das n proposições** $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n)$, ou seja, simbolicamente

$$(\exists x \in A)(p(x)) \Longleftrightarrow (p(a_1) \lor p(a_2) \lor \ldots \lor p(a_n))$$

Portanto, num universo finito, o quantificador existencial equivale a disjunções sucessivas. Assim, p. ex., no universo finito $A = \{3, 4, 5\}$ e sendo p(x) a sentença aberta "x é par" temos

$$(\exists x \in A)(p(x)) \Longleftrightarrow (3 \text{ é par} \lor 4 \text{ é par} \lor 5 \text{ é par})$$

Exemplificando, a expressão

$$(\exists x)(x \text{ vive na Lua})$$

lê-se "Existe pelo menos um x tal que x vive na Lua", e é uma **proposição falsa (F)** no universo H dos seres humanos, que também se pode traduzir por "Algum ser vive na Lua".

Analogamente, a expressão

$$(\exists x)(x > x^2)$$

lê-se "Existe pelo menos um x tal que $x > x^2$", o que é uma proposição verdadeira (V) em R ("Algum número real é superior ao seu quadrado"), mas falsa (F) em N ("Nenhum número natural é superior ao seu quadrado").

Para o símbolo $\exists$ adotam-se ainda convenções análogas àquelas que indicamos para o quantificador universal $\forall$, com esta única diferença: **nunca pode ser escrito após a sentença aberta quantificada**.

Outros exemplos

(1) A proposição

$$(\exists n \in N)(n + 4 < 8)$$

é verdadeira, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta p(n): $n + 4 < 8$ é

$$V_p = \{n \mid n \in N \land n + 4 < 8\} = \{1, 2, 3\} \neq \phi$$

(2) A proposição

$$(\exists n \in N)(n + 5 < 3)$$

é falsa, pois, o conjunto-verdade da sentença aberta p(n): $n + 5 < 3$ é

$$V_p = \{n \mid n \in N \land n + 5 < 3\} = \phi$$

(3) Obviamente, a proposição $(\exists x \in R)(x^2 < 0)$ é falsa e a proposição $(\exists x \in R)(2x - 1 = 0)$ é verdadeira.

3. VARIÁVEL APARENTE E VARIÁVEL LIVRE

Quando há um quantificador a incidir sobre uma variável, esta diz-se **aparente ou muda**, caso contrário, a variável diz-se **livre**.

Assim, p. ex., a letra x é **variável livre** nas sentenças abertas

$$3x - 1 = 14 \text{ (equação)}, \quad x + 1 > x \text{ (inequação)}$$

mas é **variável aparente** nas proposições:

$$(\exists x)(3x - 1 = 14), \quad (\forall x)(x + 1 > x)$$

É frequente em Matemática o uso do seguinte PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO DAS VARIÁVEIS APARENTES: **Todas às vezes que uma variável aparente é substituída, em todos os lugares que ocupa numa expressão, por outra variável que não figure na mesma expressão, obtém-se uma expressão equivalente.**

Assim, p. ex., são **equivalentes** as proposições:

(*) $(\forall$ Fulano) (Fulano é mortal) e $(\forall x)$ (x é mortal),
(**) $(\exists$ Fulano) (Fulano foi à Lua) e $(\exists x)$ (x foi à Lua)

De modo geral, qualquer que seja a sentença aberta p(x) em um conjunto A subsistem as equivalências

(i) $(\forall x \in A)(p(x)) \iff (\forall y \in A)(p(y))$
(ii) $(\exists x \in A)(p(x)) \iff (\exists y \in A)(p(y))$

4. QUANTIFICADOR DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Consideremos em R a sentença aberta "$x^2 = 16$". Por ser

$$4^2 = 16, \quad (-4)^2 = 16 \quad e \quad 4 \neq -4$$

podemos concluir

$$(\exists x, y \in R)(x^2 = 16 \wedge y^2 = 16 \wedge x \neq y)$$

Pelo contrário, para a sentença aberta "$x^3 = 27$" em **R** teremos as duas proposições

(i) $(\exists x \in R)(x^3 = 27)$
(ii) $x^3 = 27 \wedge y^3 = 27 \Rightarrow x = y$

A primeira proposição diz que **existe pelo menos um x ∈ R** tal que $x^3 = 27 (x = 3)$: é uma afirmação de **existência**.

A segunda proposição diz que não pode existir **mais de um** x ∈ R tal que $x^3 = 27$: é uma afirmação de **unicidade**.

A conjunção das duas proposições diz que **existe um** x ∈ R **e um só tal** que $x^3 = 27$. Para indicar este fato, escreve-se

$$(\exists ! x \in R)(x^3 = 27)$$

onde o símbolo $\exists !$ é chamado **quantificador existencial de unicidade** e se lê "Existe um e um só".

Muitas proposições da Matemática encerram afirmações de existência e unicidade. Assim, p. ex., no universo R

$$a \neq 0 \rightarrow (\forall b)(\exists ! x)(ax = b)$$

Exemplificando, são obviamente verdadeiras as proposições

$(\exists ! x \in N)(x^2 - 9 = 0)$
$(\exists ! x \in Z)($[illegible]$ < x < $[illegible]$)$
$(\exists ! x \in R)(|x| = 0)$

5. NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADOR

É claro que um quantificador universal ou existencial pode ser precedido do símbolo de negação ~. Por exemplo, no universo H dos seres humanos, as expressões

(i) $(\forall x)$ (x fala francês) (ii) $\sim(\forall x)$ (x fala francês)
(iii) $(\exists x)$ (x foi à Lua) (iv) $\sim(\exists x)$ (x foi à Lua)

são proposições que, em linguagem comum, se podem enunciar, respectivamente:

(*) "Toda a pessoa fala francês"
(**) "Nem toda a pessoa fala francês"
(***) "Alguém foi à Lua"
(****) "Ninguém foi à Lua"

São também evidentes as equivalências

$\sim(\forall x)$ (x fala francês) $\iff (\exists x)$ (~ x fala francês)
$\sim(\exists x)$ (x foi à Lua) $\iff (\forall x)$ (~ x foi à Lua)

De modo geral, a **negação** da proposição $(\forall x \in A)(p(x))$ é equivalente a **afirmação de que para ao menos um** x ∈ A, p(x) é falsa ou ~p(x) é verdadeira

Logo, subsiste a equivalência

$$\sim [(\forall x \in A)(p(x))] \Longleftrightarrow (\exists x \in A)(\sim p(x))$$

Analogamente, a negação da proposição $(\exists x \in A)(p(x))$ é equivalente à afirmação de que, para todo $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira. Logo, subsiste a equivalência

$$[\sim(\exists x \in A)(p(x))] \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(\sim p(x))$$

Estas duas importantes equivalências são conhecidas por **segundas regras de negação de DE MORGAN**.

Portanto, **A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial (seguido de negação) e vice-versa**.

Exemplos

(1) A **negação** da proposição: "Todo o aluno da turma A é bem comportado" é a proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma A que não é bem comportado", ou seja, mais simplesmente: "Nem todo aluno da turma A é bem comportado".

(2) A **negação** da proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma A que está doente" é a proposição: "Qualquer que seja o aluno da turma A, ele não está doente", ou seja, mais simplesmente: "Nenhum aluno da turma A está doente".

(3) A **negação** da proposição: "Existe um planeta que é habitável" é a proposição: "Todos os planetas não são habitáveis", ou seja: "Nenhum planeta é habitável". Representando por P o conjunto de todos os planetas, teremos, simbolicamente:

$\sim(\exists x \in P)(x \text{ é habitável}) \Longleftrightarrow (\forall x \in P)(x \text{ não é habitável})$

(4) A **negação** da proposição: "Para todo o número natural n, tem-se $n + 2 > 8$" é a proposição: "Existe pelo menos um número natural n tal que $n + 2 \not> 8$". Simbolicamente:

$$\sim(\forall n \in N)(n + 2 > 8) \Longleftrightarrow (\exists n \in N)(n + 2 \leqslant 8)$$

(5) $\sim(\exists x \in R)(x^2 < 0) \Longleftrightarrow (\forall x \in R)(x^2 \geqslant 0)$

(6) $\sim(\forall x \in R)(3x - 5 = 0) \Longleftrightarrow (\exists x \in R)(3x - 5 \neq 0)$

(7) $\sim(\forall x \in R)(x \ [illegible] \ \neq 0) \Longleftrightarrow (\exists x \in R)(x \ [illegible] \ 0)$

(8) $\sim(\exists x \in R)(\operatorname{sen} x = 0) \Longleftrightarrow (\forall x \in R)(\operatorname{sen} x \neq 0)$

6. CONTRA-EXEMPLO

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall x \in A)(p(x))$ é **falsa** (F) basta mostrar que a sua **negação** $(\exists x \in A)(\sim p(x))$ é **verdadeira** (V), isto é, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição **falsa** (F). Pois bem, o elemento x_0 diz-se um **contra-exemplo** para a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$.

Exemplos

(1) A proposição $(\forall n \in N)(2^n > n^2)$ é **falsa**, sendo o número 2 um **contra-exemplo**: $2^2 = 2^2$. Os números 3 e 4 também são **contra-exemplos**, pois, temos: $2^3 < 3^2$ e $2^4 = 4^2$.
Para $n = 1$ e para todo $n > 4$ se tem $2^n > n^2$.

(2) A proposição $(\forall x \in R)(|x| \neq 0)$ é **falsa**, sendo o número 0 um **contra-exemplo**: $|0| = 0$.

(3) A proposição $(\forall x \in R)(x^2 > x)$ é **falsa**, sendo, p. ex., $\frac{1}{3}$ um **contra-exemplo**: $(\frac{1}{3})^2 < \frac{1}{3}$.

(4) A proposição $(\forall x \in R)((x + 2)^2 = x^2 + 4)$ é **falsa**, sendo, p. ex., 1 um **contra-exemplo**: $(1 + 2)^2 \neq 1^2 + 4$ ou $9 \neq 5$.

(5) A proposição $(\forall x \in Z_+)(x^2 + x + 41$ é um número primo) é **falsa**, sendo o número 40 um **contra-exemplo**, pois, temos:

$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41(40 + 1) = 41 \cdot 41$

que é um número composto.

É interessante notar que o trinômio $x^2 + x + 41$, assinalado pela primeira vez pelo famoso matemático suíço LEONHARD EULER (1707-1783), produz números primos para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 39$.

EXERCÍCIOS

1. Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in R)(\lvert x \rvert = x)$	(b) $(\exists x \in R)(x^2 = x)$
(c) $(\exists x \in R)(\lvert x \rvert = 0)$	(d) $(\exists x \in R)(x + 2 = x)$
(e) $(\forall x \in R)(x + 1 > x)$	(f) $(\forall x \in R)(x^2 = x)$

Resolução

(a) F $(|-3| = 3 \neq -3)$, (b) V $(1^2 = 1)$,
(c) V $(|0| = 0)$, (d) F (A equação $x + 2 = x$ não tem solução),
(e) V (Todo o número real é solução da inequação $x + 1 > x$),
(f) F $(3^2 \neq 3)$

2. Dar a **negação** das proposições do Exercício 1

Resolução

(a) $(\exists x \in R)(\sim(|x| = x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in R)(|x| \neq x)$
(b) $(\forall x \in R)(\sim(x^2 = x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in R)(x^2 \neq x)$
(c) $(\forall x \in R)(\sim(|x| = 0)) \Longleftrightarrow (\forall x \in R)(|x| \neq 0)$
(d) $(\forall x \in R)(\sim(x + 2 = x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in R)(x + 2 \neq x)$
(e) $(\exists x \in R)(\sim(x + 1 > x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in R)(x + 1 \leqslant x)$
(f) $(\exists x \in R)(\sim(x^2 = x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in R)(x^2 \neq x)$

3. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$ (b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$
(c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$ (d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leqslant 7)$
(e) $(\exists x \in A)(3^x > 72)$ (f) $(\exists x \in A)(x^2 + 2x = 15)$

Resolução

(a) F (Nenhum elemento de A é raiz da equação $x + 3 = 10$)
(b) V (Para cada elemento de A se tem $x + 3 < 10$)
(c) V (1 é solução da inequação $x + 3 < 5$)
(d) F (5 não é solução da inequação $x + 3 \leqslant 7$)
(e) V $(3^4 = 81 > 72)$
(f) V (3 é raiz da equação $x^2 + 2x = 15$)

4. Dar a **negação das** proposições do Exercício 3

Resolução

(a) $(\forall x \in A)(\sim(x + 3 = 10)) \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(x + 3 \neq 10)$
(b) $(\exists x \in A)(\sim(x + 3 < 10)) \Longleftrightarrow (\exists x \in A)(x + 3 \geqslant 10)$
(c) $(\forall x \in A)(\sim(x + 3 < 5)) \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(x + 3 \geqslant 5)$
(d) $(\exists x \in A)(\sim(x + 3 \leqslant 7)) \Longleftrightarrow (\exists x \in A)(x + 3 > 7)$
(e) $(\forall x \in A)(\sim(3^x > 72)) \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(3^x \leqslant 72)$
(f) $(\forall x \in A)(\sim(x^2 + 2x = 15)) \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(x^2 + 2x \neq 15)$

5. Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\exists x \in R)(2x = x)$ (b) $(\exists x \in R)(x^2 + 3x = 2)$
(c) $(\exists x \in R)(x^2 + 5 = 2x)$ (d) $(\forall x \in R)(2x + 3x = 5x)$

6. Dar a **negação** das proposições do Exercício 5

7. Sendo $A = \{1, 2, 3\}$, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\exists x \in A)(x^2 + x - 6 = 0)$ (b) $(\exists y \in A)(\sim(y^2 + y = 6))$
(c) $(\exists x \in A)(x^2 + 3x = 1)$ (d) $\sim(\forall x \in A)(x^2 + x = 6)$
(e) $(\exists x \in A)(x^2 + 3x = 1)$ (f) $(\forall y \in A)(y^2 + 3y \neq 1)$

8. Sendo $A = \{1, 2, 3\}$, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in A)((x + 1)^2 = x^2 + 1)$
(b) $(\exists x \in A)(x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0)$
(c) $(\forall x \in A)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0)$
(d) $(\exists x \in A)(x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 50x - 24)$

9. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in A)(x + 3 \leqslant 6)$ (b) $(\exists x \in A)(x + 3 \leqslant 6)$
(c) $(\forall x \in A)(x^2 - 1 \leqslant 5)$ (d) $(\exists x \in A)(x^2 + x = 5)$

10. Dar a **negação** das proposições do Exercício 9

11. Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in R)(x^2 + 1 > 0)$
(b) $(\exists x \in R)(x^2 + 1 = 0)$
(c) $(\exists x \in R)(4x - 3 = 1 - 2x)$
(d) $(\forall x \in R)(x^2 + 3x + 1 = 0)$
(e) $(\exists x \in R)(3x^2 - 2x - 1 = 0)$
(f) $(\exists x \in R)(3x^2 - 2x + 1 = 0)$
(g) $(\forall x \in R)((x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4)$

12. Sendo $A = \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$, dar um **contra-exemplo** para cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in A)(x + 5 < 12)$ (b) $(\forall x \in A)$ (x é primo)
(c) $(\forall x \in A)(x^2 > 1)$ (d) $(\forall x \in A)$ (x é par)
(e) $(\forall x \in A)(0^x = 0)$ (f) $(\forall x \in A)(x \mid 72)$

Resolução

(a) Para $x = 7$, 8 e 9 temos $x + 5 \geqslant 12$. Logo, cada um desses três números é um **contra-exemplo**.

(b) Os números 4, 6, 8 e 9 não são primos e, portanto, cada um deles é um contra-exemplo.

(c) Não há **contra-exemplo** porque a proposição é verdadeira.

(d) Os números 3, 5, 7 e 9 são ímpares e, portanto, cada um deles é um contra-exemplo.

(e) Não há **contra-exemplo** porque a proposição é verdadeira.

(f) Os números 5 e 7 não dividem 72 e, portanto, cada um deles é um contra-exemplo.

13. Sendo $A = \{3, 5, 7, 9\}$, dar um **contra-exemplo** para cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in A)(x + 3 \geqslant 7)$ (b) $(\forall x \in A)(x$ é ímpar$)$

(c) $(\forall x \in A)(x$ é primo$)$ (d) $(\forall x \in A)(|x| = x)$

14. Dar a **negação** das proposições do Exercício 13.

15. Dar a **negação** de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in A)(p(x)) \wedge (\exists x \in A)(q(x))$

(b) $(\exists x \in A)(p(x)) \vee (\forall x \in A)(q(x))$

(c) $(\exists x \in A)(\sim p(x)) \vee (\forall x \in A)(\sim q(x))$

(d) $(\exists x \in A)(p(x)) \rightarrow (\forall x \in A)(\sim q(x))$

16. Dar a **negação** de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x)(x + 2 \leqslant 7) \wedge (\exists x)(x^2 - 1 = 3)$

(b) $(\exists x)(x^2 = 9) \vee (\forall x)(2x - 5 \neq 7)$

17. Demonstrar:

(a) $p(y) \Rightarrow (\exists x \in A)(p(x)),\ y \in A$

(b) $(\forall x \in A)(p(x)) \Rightarrow p(y),\ y \in A$

(c) $(\forall x \in A)(p(x)) \Rightarrow (\exists x \in A)(p(x))$

18. Demonstrar:

(i) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \Longleftrightarrow [(\forall x)(p(x)) \wedge (\forall x)(q(x))]$

(ii) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow [(\exists x)(p(x)) \wedge (\exists x)(q(x))]$

(iii) $(\exists x)(p(x) \vee q(x)) \Longleftrightarrow [(\exists x)(p(x)) \vee (\exists x)(q(x))]$

(iv) $[(\forall x)(p(x)) \vee (\forall x)(q(x))] \Rightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$

Capítulo 17

Quantificação de Sentenças Abertas Com Mais de Uma Variável

1 QUANTIFICAÇÃO PARCIAL

Consideremos, p. ex., a expressão

$$(\exists x \in A)(2x + y < 7)$$

sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o **universo** das variáveis x e y.

Esta expressão, que se pode ler: "Existe pelo menos um $x \in A$ para o qual se tem $2x + y < 7$", **não é uma proposição**, visto que o seu valor lógico, embora não dependa de x (**variável aparente**), depende do valor de y (**variável livre**). Portanto, é uma **sentença aberta** em y, cujo conjunto-verdade é $\{1, 2, 3, 4\}$, pois somente para $y = 5$ não existe $x \in A$ tal que $2x + y < 7$.

Analogamente, a expressão

$$(\forall y \in A)(2x + y < 10)$$

sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o **universo** das variáveis x e y, que se pode ler "Para todo $y \in A$ se tem $2x + y < 10$", também **não é uma proposição**, mas uma **sentença aberta** em x (**variável livre**), cujo conjunto-verdade é $\{1, 2\}$, pois, somente para $x = 1$ ou $x = 2$ se tem $2x + y < 10$ para todo $y \in A$.

De um modo geral, dada uma sentença aberta com mais de uma variável, a aplicação de um quantificador referido a uma das variáveis transforma a sentença aberta dada numa outra **sentença aberta com menos uma variável livre**. Logo, a aplicação sucessiva de quantificadores acaba por transformar uma **sentença aberta com mais de uma variável numa proposição**.

2 QUANTIFICAÇÃO MÚLTIPLA

Toda a sentença aberta precedida de quantificadores, **um para cada variável**, isto é, com todas as variáveis quantificadas, é uma **proposição**, pois, assume um dos valores lógicos V ou F.

Assim, p. ex., são proposições as seguintes expressões:

(i) $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(p(x, y))$
(ii) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(p(x, y))$
(iii) $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in C)(p(x, y, z))$

Exemplos

(1) Consideremos os conjuntos

$$H = \{Jorge, Cláudio, Paulo\}, \quad M = \{Suely, Carmen\}$$

e seja p(x, y) a sentença aberta em H x M: "x é irmão de y".
A proposição

$$(\forall x \in H)(\exists y \in M)(p(x, y))$$

se pode ler: "Para todo x de H existe pelo menos um y de M tal que x é irmão de y". Em outros termos: "Cada homem de H é irmão de Suely ou de Carmen".
A proposição

$$(\exists y \in M)(\forall x \in H)(p(x, y))$$

se pode ler: "Pelo menos uma das mulheres de M é irmã de todos os homens de H". Observe-se que, mudando a ordem dos quantificadores, obtem-se uma proposição diferente.

(2) A proposição

$$(\forall x \in N)(\forall y \in N)((x + y)^2 > x^2 + y^2)$$

se pode ler: "Quaisquer que sejam x e y pertencentes a N, $(x + y)^2$ é maior que $x^2 + y^2$".
Esta proposição também se pode escrever:

$$(\forall x, y \in N)((x + y)^2 > x^2 + y^2)$$

ou

$$(x + y)^2 > x^2 + y^2, \quad \forall x, y \in N$$

e é obviamente verdadeira (V), enquanto que a proposição

$$(x + y)^2 > x^2 + y^2, \quad \forall x, y \in R$$

é falsa (F).
Costuma-se, para simplificar a notação, omitir a indicação do domínio de cada variável e escrever, p. ex.:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \ \forall x, y$$

o que é verdadeiro em N e em R.

(3) Consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e a sentença aberta em A x B: "$2x + y = 8$".
A proposição

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(2x + y = 8)$$

é verdadeira (V), pois para x = 1, 2, 3, 4 temos y = 6, 4, 2, 0 ∈ B.
A proposição

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(2x + y = 8)$$

é falsa (F), pois, para y = 8, temos $x = 0 \notin A$.
A proposição

$$(\exists y \in B)(\forall x \in A)(2x + y = 8)$$

também é falsa (F), pois, não existe um $y \in B$ tal que para todo $x \in A$ seja $2x + y = 8$.
Analogamente, também é falsa (F) a proposição

$$(\exists x \in A)(\forall y \in B)(2x + y = 8)$$

3. COMUTATIVIDADE DOS QUANTIFICADORES

I. Quantificadores da mesma espécie podem ser comutados

$$(\forall x)(\forall y)(p(x, y)) \Longleftrightarrow (\forall y)(\forall x)(p(x, y)),$$
$$(\exists x)(\exists y)(p(x, y)) \Longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)(p(x, y))$$

II. Quantificadores de espécies diferentes não podem em geral ser comutados

Exemplificando, seja a sentença aberta "x é filho de y", o universo das variáveis x e y sendo o conjunto H dos seres humanos. A proposição

$$(\forall x)(\exists y)(x \text{ é filho de } y)$$

é verdadeira (V), mas a proposição

$$(\exists y)(\forall x)(x \text{ é filho de } y)$$

é falsa (F).
Seja, agora, a sentença aberta "$y > x$", o universo das variáveis x e y sendo o conjunto N dos numeros naturais. A proposição

$$(\forall x)(\exists y)(y > x)$$

é verdadeira (V), mas a proposição

$$(\exists y)(\forall x)(y > x)$$

é falsa (F).

4 NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADORES

A negação de proposições com mais de um quantificador se obtem mediante a aplicação sucessiva das regras para negação de proposições com um único quantificador (segundas regras de negação de DE MORGAN).

Exemplos:

(1) Negação de proposições com dois quantificadores da mesma espécie

$$\sim(\forall x)(\forall y)(p(x, y)) \Longleftrightarrow (\exists x)(\sim(\forall y)(p(x, y))) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\sim p(x, y))$$

$$\sim(\exists x)(\exists y)(p(x, y)) \Longleftrightarrow (\forall x)(\sim(\exists y)(p(x, y))) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\sim p(x, y))$$

(2) Negação de proposições com dois quantificadores de espécies diferentes

$$\sim(\forall x)(\exists y)(p(x, y)) \Longleftrightarrow (\exists x)(\sim(\exists y)(p(x, y))) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\sim p(x, y))$$

$$\sim(\exists x)(\forall y)(p(x, y)) \Longleftrightarrow (\forall x)(\sim(\forall y)(p(x, y))) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\sim p(x, y))$$

(3) Negação de proposições com três quantificadores

$$\sim(\exists x)(\exists y)(\forall z)(p(x, y, z)) \Longleftrightarrow (\forall x)(\sim(\exists y)(\forall z)(p(x, y, z))) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\sim p(x, y, z))$$

EXERCÍCIOS

1 Sendo {1, 2, 3, 4, 5} o **universo** das variáveis x e y, determinar o **conjunto-verdade** de cada uma das seguintes sentenças abertas:

(a) $(\exists y)(2x + y < 7)$ (b) $(\forall x)(2x + y < 10)$

2 Sendo {1, 2, ..., 9, 10} o **universo** das variáveis x e y, determinar o **conjunto-verdade** de cada uma das seguintes sentenças abertas:

(a) $(\forall y)(x + y < 14)$ (b) $(\exists y)(x + y < 14)$

3 Sendo {1, 2, 3} o **universo** das variáveis x e y, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\exists x)(\forall y)(x^2 < y + 1)$ (b) $(\forall x)(\exists y)(x^2 + y^2 < 12)$
(c) $(\forall x)(\forall y)(x^2 + y^2 <$ [illegible]$)$ (d) $(\forall x)(\forall y)(x^2 + 2y < 10)$
(e) $(\exists x)(\forall y)(x^2 + 2y < 10)$ (f) $(\forall x)(\exists y)(x^2 + 2y < 10)$
(g) $(\exists x)(\exists y)(x^2 + 2y < 10)$

4 Sendo {1, 2, 3} o **universo** das variáveis x, y e z, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(x^2 + y^2 < 2z^2)$
(b) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(x^2 + y^2 < 2z^2)$

5 Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall y \in R)(\exists x \in R)(x + y = y)$
(b) $(\forall x \in R)(\exists y \in R)(x + y = 0)$
(c) $(\forall x \in R)(\exists y \in R)(xy = 1)$
(d) $(\forall y \in R)(\exists x \in R)(y < x)$

6 Sendo A = {1, 2, ..., 9, 10}, determinar o **valor lógico** (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y <$ [illegible]$4)$
(b) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 14)$

7 Dar a **negação** de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x)(\exists y)(p(x) \vee q(y))$ (b) $(\exists x)(\forall y)(p(x) \vee \sim q(y))$
(c) $(\exists y)(\exists x)(p(x) \wedge \sim q(y))$ (d) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \to q(y))$
(e) $(\exists x)(\forall y)(p(x, y) \to q(x, y))$

8 Dar a **negação** de cada uma das proposições do Exercício 5.

9 Demonstrar:

(i) $(\exists x)(\forall y)(p(x, y)) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)(p(x, y))$
(ii) $(\exists y)(\forall x)(p(x, y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(p(x, y))$

10. Conjuntos Limitados

Seja A um subconjunto não vazio do conjunto R dos números reais ($A \neq \varnothing$ e $A \subset R$).

Definição 1. Diz-se que A é **limitado inferiormente** (ou **limitado à esquerda**) se e somente se

$$(\exists\, a \in R)(\forall\, x \in A)(a \leqslant x)$$

Definição 2. Diz-se que A é **limitado superiormente** (ou **limitado à direita**) se e somente se

$$(\exists\, b \in R)(\forall\, x \in A)(x \leqslant b)$$

Definição 3. Diz-se que A é **limitado** se e somente se

$$(\exists\, a, b \in R)(\forall\, x \in A)(a \leqslant x \wedge x \leqslant b)$$

Respostas dos Exercícios

CAPÍTULO 1

1. (a) V (b) F (c) F (d) F (e) V (f) F (g) V
(h) F (i) V (j) F (k) F (l) F (m) V (n) F
(o) V (p) F (q) V (r) V (s) V (t) V (u) F

CAPÍTULO 2

1. (a) Não está frio.
(b) Está frio e está chovendo.
(c) Está frio ou está chovendo.
(d) Está chovendo se e somente se está frio.
(e) Se está frio, então não está chovendo.
(f) Está frio ou não está chovendo.
(g) Não está frio e não está chovendo.
(h) Está frio se e somente se não está chovendo.
(i) Se está frio e não está chovendo, então está frio.

2. (a) Se Carlos é feliz, então Jorge é rico.
(b) Jorge é rico ou Carlos não é feliz.
(c) Carlos é feliz se e somente se Jorge não é rico.
(d) Se Jorge não é rico, então Carlos é feliz.
(e) Não é verdade que Jorge não é rico.
(f) Se Jorge não é rico e Carlos é feliz, então Jorge é rico.

3. (a) Claudio fala inglês ou alemão.
(b) Claudio fala inglês e alemão.
(c) Claudio fala inglês mas não alemão.
(d) Claudio não fala inglês e nem alemão.
(e) Não é verdade que Claudio não fala inglês.
(f) Não é verdade que Claudio não fala inglês e nem alemão.

4. (a) Não é verdade que João é gaúcho e Jaime não é paulista.
(b) Não é verdade que João não é gaúcho.

(c) Não é verdade que João não é gaúcho ou que Jaime não é paulista.
(d) Se João é gaúcho, então Jaime não é paulista
(e) João não é gaúcho se e somente se Jaime não é paulista
(f) Não é verdade que, se Jaime não é paulista, então João é gaúcho

5 (a) $p \wedge q$ (b) $p \wedge \sim q$ (c) $\sim(\sim p \vee q)$
(d) $\sim p \wedge \sim q$ (e) $p \vee (\sim p \wedge q)$ (f) $(\sim p \vee \sim q)$

6 (a) $p \wedge q$ (b) $p \vee \sim q$ (c) $\sim p \wedge \sim q$
(d) $(p \vee q) \wedge \sim q$

7 (a) $(p \vee q) \wedge$ [illegible] (b) $(p \wedge$ [illegible]$) \vee (p \wedge r)$ (c) $(p \wedge$ [illegible]$)$
(d) $((q \vee r) \wedge$ [illegible] $p)$

8 (a) x [illegible] $0 \vee x > 0$ (b) $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ (c) $x > 1 \vee x + y = 0$
(d) $x^2 = x$ [illegible] $x \wedge x^0 =$ [illegible]

9 (a) $(x + y$ [illegible] $0 \wedge z > 0) \vee z = 0$ (b) $x = 0 \wedge (y + z$ [illegible] $x \vee z = 0)$
(c) $x \neq 0 \vee (x =$ [illegible]$)$ (d) [illegible] $= y$ [illegible] $z =$ [illegible] $(x$ [illegible] y [illegible] z [illegible] 0

10 (a) $x > 0 \to y = 2$ (b) $x + y = 2 \to z > 0$
(c) $x =$ [illegible] $z = 2 \to$ [illegible] (d) $z > 5 \to x \neq 1 \wedge x \neq 2$
(e) $x \neq y \to x + z > 5 \wedge y + z < 5$ (f) $(x +$ [illegible] $) \to x +$ [illegible]
(g) x [illegible] $2 \to$ [illegible] $x = 0$ (h) $y = 4 \wedge (x$ [illegible] y [illegible] $x < 5)$

11 (a) $(x \geq 5 \wedge x < 7) \vee x \neq 6$ (b) $x < 5 \wedge x > 3 \to x = 4$
(c) $x >$ [illegible] $\vee (x <$ [illegible] $\wedge x > 3)$

12 (a) F (b) V (c) F (d) V (e) F (f) F (g) F

13 (a) V (b) V (c) F (d) F (e) V (f) V (g) F
(h) F (i) V (j) F (k) F

14 (a) V (b) V (c) F (d) V (e) V (f) F (g) V
(h) V

15 (a) V (b) V (c) F (d) F (e) V (f) V (g) F
(h) F (i) V (j) V

16 (a) V (b) F (c) V (d) F (e) V (f) F (g) V
(h) V

17 (a) F (b) F (c) F (d) V (e) V (f) F (g) V

18. (a) V (b) V (c) F (d) F (e) V (f) F

19 (a) V(p) = V ou V(p) = F (b) V(p) = F (c) V(p) = F
(d) V(p) = V ou V(p) = F (e) V(p) = F (f) V(p) = F

20 (a) V(p) = F e V(q) = V, V(p) = F e V(q) = F
(b) V(p) = F e V(q) = F
(c) V(p) = V e V(q) = V
(d) V(p) = V e V(q) = V
(e) V(p) = F e V(q) = V

CAPÍTULO 3

1

(a)

p	q	~q	p ∨ ~q	~(p ∨ ~q)
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

(b)

p	q	~q	p ∨ q	~(p → q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

(c)

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p ∧ q → p ∨ q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

(d)

p	q	~p	q → p	p → (q → p)
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

(e)

p	q	p → q	p ∧ q	(p → q) → p ∧ q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

(f)

p	q	~q	~q ∧ p	q ⟷ ~q ∧ p
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V

(g)

p	q	~q	p ⟷ ~q	q → p	(p ⟷ ~q) → q → p
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

(h)

p	q	(p	⟷	~	q)	→		p	∧	q
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F
			3	2	1	4	2	1	3	1

(a)

p	q	r	~	p	∧	r	→	q	∨	~	r
V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V
V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	F
			2	1	3	1	4	1	3	2	1

(b)

p	q	r	p	→	r	⟷	q	∨		r
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	F
			[illegible]	2	1	4	[illegible]	3	2	[illegible]

(c)

p	q	r	p	∧	(p	→	~	r)	⟷	q	∨	r
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F	F	F
			1	4	1	3	2	1	5		2	1

(d)

(p	∧	q	→	r)	∨	~	(p	⟷	q	∨		r)
V	V	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V
V	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F
	2	1	3	[illegible]	5	2		4	[illegible]	3	2	

3. (a) VFFV (b) VVFF (c) FVVF (d) FVVF (e) VFFV
(f) FVFV (g) VVFV

4. (a) VVVVVFFF (b) VFVVVFVF (c) FVFFVVVV
(d) VVVVVFFF (e) VVFVFVFV (f) FFFFVVFF

5. (a) V (b) F (c) F (d) V (e) F (f) V

6. F

7. (a) F (b) V (c) V (d) V

8. (a) F (b) F (c) V

9. (a) F (b) V (c) F (d) V (e) V (f) V
(g) V (h) V (i) F (j) F (k) V (l) V

10. (a) V (b) F (c) V (d) V (e) V (f) V

11. (a) F (b) V (c) V (d) V (e) V (f) F
(g) V (h) V

12. (a) V (b) V (c) F (d) V (e) V

13. (a) V (b) V

14. (a) F (b) V (c) V

15. (a) $(q \leftrightarrow r \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim\sim q)$
(b) $p \wedge \sim\sim q \leftrightarrow (q \leftrightarrow r \vee q)$
(c) $(p \vee q \rightarrow \sim r) \vee (\sim q \wedge r \wedge q)$

CAPÍTULO 4

4. (a), (b), (c), (g), (h) tautológicas; (d), (e), (f) contingentes

CAPÍTULO 6

8. (a) F (b) V (c) F (d) V

CAPÍTULO 7

4. (a) Está frio e não está chovendo.
(b) O pai de Marcos não é pernambucano e a mãe não é gaúcha.
(c) As vendas estão aumentando ou os preços estão diminuindo.
(d) Jorge não estuda Física ou estuda Química.

CAPÍTULO 8

3. (a) $\sim p \wedge q$ (b) $p \vee \sim q$ (c) $p \wedge q$ (d) $\sim p \wedge q$
(e) q (f) C (Ctr.)

7. (a) $\sim p \vee q$ (b) $\sim p$ (c) $p \wedge \sim p$ (d) $p \vee \sim p$
(e) $\sim p \vee \sim q$ (f) $\sim p$ (g) $p \vee \sim p$ (h) $\sim p \wedge \sim q$
(i) $(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$ (j) $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge q$
(k) $p \wedge (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ (l) $p \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
(m) $(\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$ (n) $p \wedge (p \vee q) \wedge r$

8. (a) $p \wedge q$ (b) $p \wedge \sim q$ (c) $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$ (d) $\sim p \wedge \sim q$
(e) $\sim p \vee q$ (f) $\sim p \vee \sim q$ (g) $p \vee \sim p$ (h) $p \wedge \sim p$
(i) $\sim p \vee \sim q$ (j) $\sim p \wedge \sim q$ (k) $\sim p$ (l) $p \vee \sim p$

CAPÍTULO 9

1. (a) $(\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p)) \rightarrow q$
(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
(c) $(p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\sim q \vee (r \wedge s))) \rightarrow r \wedge s$
(d) $((x = y \rightarrow x = 5) \wedge (x = 5 \rightarrow x < z)) \rightarrow (x = y \rightarrow x < z)$

2. (a) $p, \quad q \vee \sim p \vdash q$
(b) $p \rightarrow q, \quad p \wedge \sim q \vdash s$
(c) $\sim(x < 0 \wedge y \neq x) \vdash x \not< 0 \vee y = x$

3. (a) AD (b) SIMP (c) SH (d) MP (e) MT (f) CONJ
(g) SD (h) ABS (i) MP (j) MT (k) CONJ (l) AD
(m) SD (n) SH (o) SIMP

4. (a) $x = z$ (b) $xy \in \mathbb{R}$ (c) $x > z$ (d) $3 > 1$
   (e) $y + 1 = 2$ (f) $x = y$

5. (a) $x = 0$ (b) $x \neq z$ (c) $\sim(p \leftrightarrow q)$ (d) $x \ngtr 3$

6. (a) $x \neq 4$ (b) $y < 6$ (c) $r \wedge t$ (d) $\sim p$

7. (a) $p \to t$ (b) $x = 3 \to x \neq z$
   (c) $s \vee t \to \sim p$ (d) $xy = 6 \to y = 2$

8. (a) $r \vee \sim s$ (b) $x > 3 \vee z < 2$
   (c) $xy = 0 \vee xy > 3$ (d) $x^2 = 4 \vee y^2 = 9$

9. (a) $\sim(p \wedge q) \vee \sim q$ (b) $p \vee \sim\sim q$
   (c) $x \nless 3 \vee x \ngtr 4$ (d) $x \neq 2 \vee x \neq 8$

CAPÍTULO 10

5. $p \to \sim q$, $p \vee r$, $p \vdash r$; Sofisma

CAPÍTULO 14

1. (a) $\{3\}$ (b) $\{1, 2, 3, 4\}$ (c) $\{2, 3\}$
   (d) $\{2\}$ (e) $\{5\}$ (f) $\{6, 7, 8, \ldots\}$

2. (a) $\{3, -3\}$ (b) $\{-1, 0, 1\}$ (c) $\{2, -2\}$
   (d) $\{0\}$ (e) $\{4, -3\}$ (f) $\{3, -2\}$

3. (a) $\{1, 3, 4\}$ (b) $\{1, 3\}$ (c) $\{1\}$ (d) $\{1, 3, 4\}$
   (e) $\{4\}$ (f) $\{1\}$ (g) $\{1, 3, 9\}$ (h) $\{3, 4, 7, 9\}$

4. (a) $\{-1, 1, 2, 4\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$ (c) $\{-1, 1\}$
   (d) ϕ (e) $\{-2, 2\}$ (f) $\{-3, 3\}$
   (g) $\{-2, 2, 4\}$ (h) $\{-1, 0\}$

5. (a) $\{9, 10\}$ (b) $\{4, 10\}$ (c) $\{4, 9\}$ (d) $\{1\}$

6. $\{(1, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$

7. $\{(2, 8), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$

8. $\{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$

9. $\{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

10. $\{(2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (5, 2), (6, 6), (6, 3)\}$

11. $\{(-2, -1), (-2, 0), (0, -1), (0, 0), (1, -1)\}$

CAPÍTULO 15

1. (a) $\{1, 3, 5\}$ (b) $\{2, 4, 6, 8\}$ (c) $\{3, 6\}$ (d) $\{1, 2, 4, 5, 6\}$

2. (a) $\{0, 1, 3\}$ (b) $\{0, 1, 2, 4\}$ (c) $\{0, 2, 3, 5\}$ (d) $\{1, 4, 5\}$

3. (a) $\{4, 5\}$ (b) $\{0, 2, 4\}$ (c) $\{0, 5\}$ (d) $\{5\}$
   (e) $\{0, 1, 4\}$ (f) $\{1, 2, 4, 5\}$

4. (a) $\{-3, -1, 1, 3\}$ (b) $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$ (c) $\{-3, -2, -1\}$
   (d) $\{-3, -1, 1\}$ (e) $\{-3, 2, 3\}$

5. (a) $\{0, 2, 4, 5\}$ (b) $\{0, 2, 3, 5\}$ (c) $\{2, 4\}$ (d) $\{0, 1\}$

6. $V_{p \wedge q} = [-1, \frac{3}{2}]$ $V_{p \to q} =]-1, \to[$

7. $V_{p \vee q} = \left\{-3, -\frac{4}{5}, \frac{2}{3}\right\}$ $V_{p \wedge q} = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

8. $V_{p \wedge q} =]-\frac{2}{5}, \frac{3}{4}]$ $V_{\sim p} =]\frac{3}{4}, \to[$

9. $V_{p \to q} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $V_{q \to p} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

   $V_{p \leftrightarrow q} = \{1, 3, 4, 6, 8\}$

11. (a) $C_A V_p \cap C_A V_q$ (b) $V_p \cup C_A V_q$
    (c) $C_A V_p \cup V_q \cup V_r$ (d) $(V_q \cap V_r) \cup (C_A V_p \cap V_r) \cup C_A(V_p \cup V_q)$

CAPÍTULO 16

5. (a) V (b) V (c) F (d) V

6. (a) $(\forall x \in R)(2x \neq x)$ (b) $(\forall x \in R)(x^2 + 3x \neq 2)$
   (c) $(\forall x \in R)(x^2 + 5 \neq 2x)$ (d) $(\exists x \in R)(2x + 3x \neq 5x)$

7. (a) V (b) V (c) F (d) V (e) V (f) V

8. (a) F (b) F (c) V (d) F

9. (a) F (b) V (c) V (d) F

10. (a) $(\exists x \in A)(x + 3 \geqslant 6)$ (b) $(\forall x \in A)(x + 3 \geqslant 6)$
    (c) $(\exists x \in A)(x^2 - 10 > 8)$ (d) $(\forall x \in A)(2x^2 + x \neq 15)$

11. (a) V (b) F (c) V (d) F (e) V (f) F (g) V

13. (a) 3 (b) Não há (a proposição é verdadeira)
    (c) 9 (d) Não há (a proposição é verdadeira)

14. (a) $(\exists x \in A)(x + 3 < 7)$ (b) $(\exists x \in A)$ (x é par)
    (c) $(\exists x \in A)$ (x não é primo) (d) $(\exists x \in A)(|x| \neq x)$

15. (a) $(\exists x \in A)(\sim p(x)) \vee (\forall x \in A)(\sim q(x))$
    (b) $(\forall x \in A)(\sim p(x)) \wedge (\exists x \in A)(\sim q(x))$
    (c) $(\forall x \in A)(p(x)) \wedge (\exists x \in A)(q(x))$
    (d) $(\exists x \in A)(p(x)) \wedge (\exists x \in A)(q(x))$

16. (a) $(\exists x)(x + 2 > 7) \vee (\forall x)(x^2 - 1 \neq 3)$
    (b) $(\forall x)(x^2 \neq 9) \wedge (\exists x)(2x - 5 = 7)$

CAPÍTULO 17

1. (a) $\{1, 2\}$ (b) ϕ

2. (a) $\{1, 2, 3\}$ (b) $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$

3. (a) V (b) B (c) F (d) F (e) V (f) F (g) V

4. (a) V (b) F

5. (a) V (b) V (c) F (d) V

6. (a) V (b) F

7. (a) $(\exists x)(\forall y)(\sim p(x) \wedge \sim q(y))$ (b) $(\forall x)(\exists y)(\sim p(x) \wedge q(y))$
   (c) $(\forall y)(\forall x)(\sim p(x) \vee q(y))$ (d) $(\exists x)(\forall y)(p(x, y) \wedge \sim q(y))$
   (e) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \wedge \sim q(x, y))$

8. (a) $(\exists y \in R)(\forall x \in R)(x + y \neq y)$ (b) $(\exists x \in R)(\forall y \in R)(x + y \neq 0)$
   (c) $(\exists x \in R)(\forall y \in R)(xy \neq 1)$ (d) $(\exists y \in R)(\forall x \in R)(y \geqslant x)$

Bibliografia

1. BOSCH, J. – Simbolismo Lógico; Eudeba; 1965
2. BURGOS, A. – Iniciación a la Lógica Matemática; S.C.; 1973
3. CHEIFETZ y AVENOSO – Lógica y Teoria de Conjuntos; Alhambra; 1974
4. CHAUVINEAU, J. – La Logique Moderne; P.U.F.; 1966
5. COPI, IRVING M. – Introduction to Logic; MacMillan; 1963
6. DEANO, A. – Introducción a La Lógica Formal; Alianza; 1973
7. GARRIDO, M. – Logica Simbólica; Tecnos; 1973
8. HILBERT y ACKERMANN – Lógica Teórica; Tecnos; 1968
9. KEMENY, SNELL y THOMPSON – Matemáticas Finitas; Eudeba; 1967
10. LIPSCHUTZ, S. – Finite Mathematics; Schaum; 1966
11. LIGHTSTONE, A. H. – Symbolic Logic; Harper; 1966
12. MORA y LEBLANC – Lógica Matemática; F.C.E.; 1965
13. MORENO, A. – Ejercicios de Logica; Eudeba; 1973
14. MURO, HERMOSA y JACHIMOVICZ – Ejercicios de Lógica; Paidós; 1974
15. MENDELSON, E. – Boolean Algebra; Schaum; 1970
16. NOVIKOV, P. S. – Mathematical Logic; Oliver & Boyd; 1964
17. NUNO, J. – Elementos de Lógica Formal; EBVC; 1973
18. SUPPES y HILL – Lógica Matemática; Reverté; 1973